This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

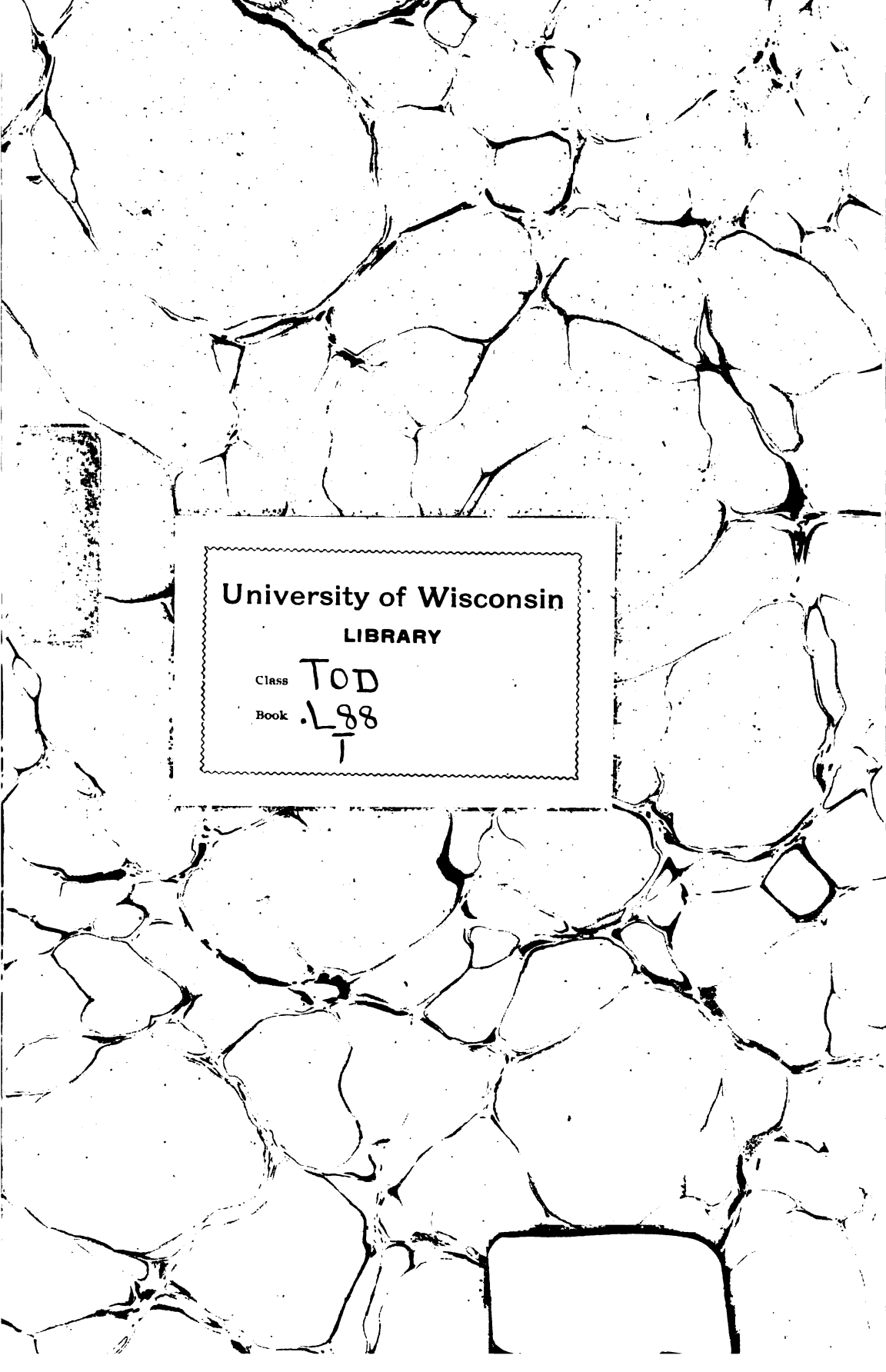
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

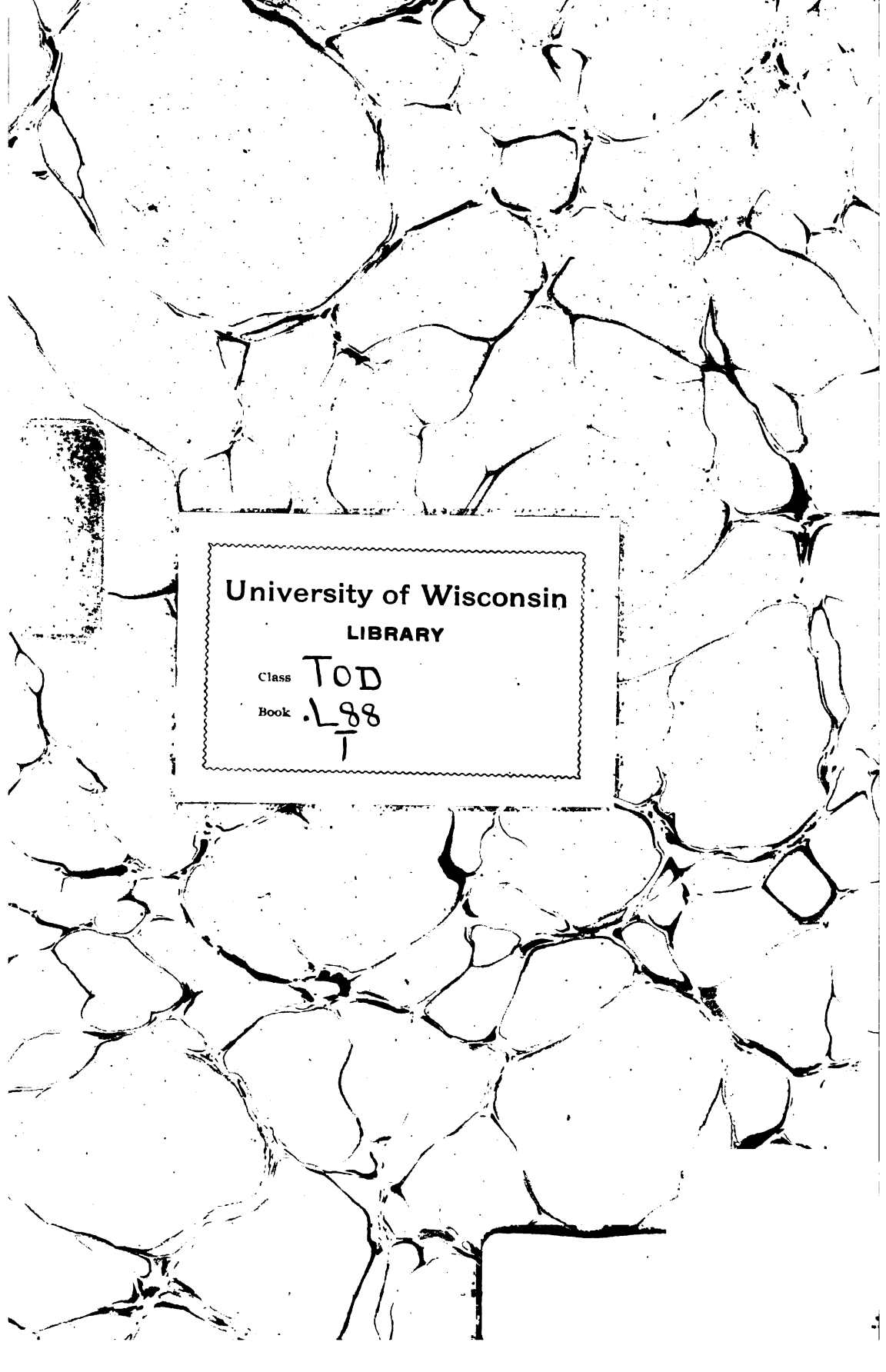
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

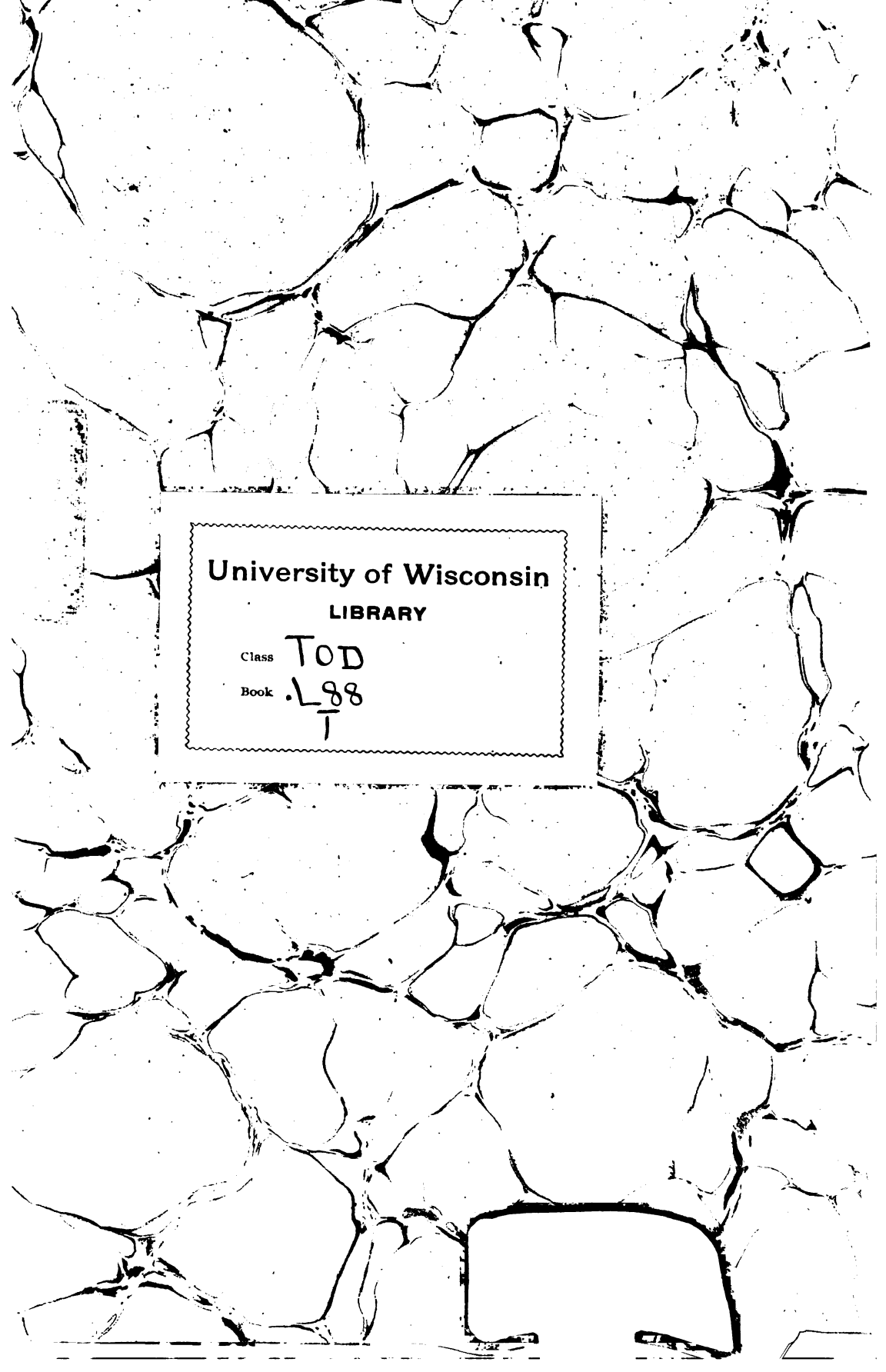
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


University of Wisconsin
LIBRARY
Class TOD
Book .L88
1


University of Wisconsin
LIBRARY
Class TOD
Book .L88
1


University of Wisconsin
LIBRARY
Class TOD
Book .L88
1

TRAITÉ THÉORIQUE ET PRATIQUE

DES

COURANTS ALTERNATIFS INDUSTRIELS

PARIS. — IMPRIMERIE E. BERNARD ET Cie

23, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 23

TRAITÉ THÉORIQUE ET PRATIQUE

DES

COURANTS ALTERNATIFS INDUSTRIELS

PAR

F. LOPPÉ et R. BOUQUET
INGÉNIEURS DES ARTS ET MANUFACTURES

OUVRAGE EN DEUX VOLUMES

PREMIER VOLUME. — PARTIE THÉORIQUE

PARIS
E. BERNARD et Cie, IMPRIMEURS-EDITEURS
53ter, Quai des Grands-Augustins, 53ter
1894

4 12 59
9 Mr '97
TCD
T.88
1
697.086

INTRODUCTION

Jusqu'à ce jour, aucun ouvrage donnant la théorie complète des courants alternatifs et leur pratique, n'a été édité en France

Tout ce qui s'est publié se trouve épars dans des brochures et publications et force est aux personnes désireuses d'étudier ces théories, de compulser une volumineuse littérature, dont rien ne coordonne ni ne rattache les divers sujets traités.

L'ouvrage que nous présentons aujourd'hui aux lecteurs que la science électrique intéresse, répond, croyons-nous, à un besoin, en venant rassembler, sous une forme didactique, ce qui est relatif aux courants alternatifs.

A côté des théories connues, nous avons établi une méthode générale, permettant de résoudre d'une façon assez simple les divers problèmes.

Dans le premier volume, nous traitons par le calcul, les cas qui peuvent se présenter le plus souvent dans la pratique.

Au lecteur abordant pour la première fois cette étude,

l'ouvrage pourra paraître un peu trop mathématique. Nous avons cependant fait tous nos efforts pour traiter ces problèmes si complexes de la manière la plus simple possible.

Toutes les conclusions, trouvent leur application dans la pratique, que l'on ne peut du reste, aborder avec fruit, qu'en possédant à fond la théorie.

Nous avons emprunté nombre de renseignements aux journaux techniques, l'*Électricien,* l'*Industrie électrique* et la *Lumière électrique*, ainsi qu'aux ouvrages spéciaux de M. Blakeslay, de M. Fleming et de MM. Rodet et Busquet et aux traités d'électricité générale de M. E. Gérard et de M. F. Lucas.

Nous avons cité chaque fois autant que possible, la source à laquelle nous puisions nos renseignements et si parfois nous l'avions omis, ce serait involontairement.

TABLE DES MATIÈRES

1° Partie théorique

Pages

CHAPITRE I. **Du courant variable.**

CHAPITRE II. **Le courant périodique simple** 10
§ 1. Définition de la fonction périodique simple et tracé de la courbe représentative. 10
§ 2. Calculs préliminaires 18
§ 3. Force électromotrice périodique simple, agissant dans un circuit dépourvu de capacité et de self-induction 24
§ 4. Méthode générale pour la résolution des problèmes relatifs aux circuits pourvus de capacité et de self-induction, dans lesquels agit une force électromotrice appliquée, périodique simple 26
§ 5. Force électromotrice périodique simple, agissant dans un circuit ayant de la self-induction. . . . 28
§ 6. Force électromotrice périodique simple, agissant dans un circuit, dans lequel est intercalé un condensateur 38
§ 7. Force électromotrice périodique simple, agissant dans un circuit ayant de la self-induction, dans lequel est intercalé un condensateur. 44
§ 7 *bis* Circuits dérivés ayant de la self-induction, application au wattmètre 51
§ 8. Cas général des circuits dérivés 58
§ 9. Condensateur transformateur 77
§ 10. Induction mutuelle 82
§ 11. Circuits dérivés avec induction mutuelle. 101
§ 12. Théorie géométrique. 103
§ 13. Capacité répartie le long d'un conducteur 122

CHAPITRE III. **Des alternateurs** 130
§ 1. Théorie des alternateurs 130
§ 2. Machines à courants polyphasés 140
§ 3. Couplage des alternateurs. 140

		Pages
CHAPITRE IV.	**Les courants polyphasés**	148
§ 1.	Théorie des champs magnétiques tournants . . .	148
§ 2.	Des systèmes de montage des lignes à courants polyphasés	158
§ 3.	Des transformateurs pour courants polyphasés . .	212
§ 4.	Transformation des courants alternatifs en courants continus et des courants continus en courants alternatifs	213
CHAPITRE V.	**Théorie des moteurs à courant alternatif.** . . .	223
§ 1.	Classement des moteurs	222
§ 2.	Moteurs à champ de direction constante	223
§ 3.	Moteurs à champ alternatif	226
§ 4.	Moteurs à champ tournant	235
CHAPITRE VI.	**Etude de la décharge des condensateurs**	253
CHAPITRE VII.	**Influence du fer**	267
§ 1.	Hystérésis	267
§ 2.	Courants de Foucault et leur calcul	273

PARTIE THÉORIQUE

CHAPITRE PREMIER.

Du courant variable.

Lorsqu'une f. e.m.(1) variable agit dans un circuit, n'ayant que de la résistance, la loi de Ohm est directement applicable et à chaque instant, l'intensité du courant est donnée par le quotient de la f. e. m., par la résistance du circuit.

Cette loi, ainsi énoncée, n'est pas applicable à priori, à tout circuit soumis à une f. e. m. variable, car la self-induction et la capacité (ou celle de condensateurs soit intercalés, soit placés en dérivation) font naître des f. e. m., qui se combinent avec la f. e. m. à laquelle est soumis un circuit, et c'est à la résultante de ces forces seulement que peut être appliquée la loi de Ohm.

On doit donc distinguer dans un circuit soumis à une f.e.m. variable :

1° *La f. e. m. appliquée* (impressed electromotiv force) c'est-à-dire celle développée par une source extérieure (alternateur, induction d'un circuit voisin parcouru par un courant variable, etc...), que l'on peut appeler aussi *f. e. m. extérieure.*

Cette f. e. m. peut être la résultante de plusieurs autres. Nous désignerons par e_a, sa valeur instantanée et par E_a sa valeur maximum.

2° La f. e. m. due à l'induction du courant sur le circuit lui-même ou la *f. e. m. de self-induction* ou *d'auto-induction.*

Nous désignerons par e_s la valeur instantanée de cette f. e. m. et par E_s sa valeur maximum.

3° La f. e. m. due à la capacité du circuit (ou à celle de condensa-

(1) *f. e. m.* force électromotrice et *s. i.* self induction.

teurs intercalés dans ce circuit ou placés en dérivation) ou *f. e. m. de capacité.*

Nous désignerons par e_c, la valeur instantanée de cette f. e. m. et par E_c, sa valeur maximum.

4° Ces diverses f. e. m. donnent une résultante qui est la *f. e. m. effective* ou *f. e. m. agissante.*

Nous désignerons par e_e la valeur instantanée de cette f. e. m. et par E_e sa valeur maximum.

La loi de Ohm doit donc être énoncée, ainsi qu'il suit, dans le cas de courants variables:

La valeur instantanée de l'intensité du courant dans un circuit, est donnée par le quotient de la valeur qu'a la f. e. m. effective au même instant, par la résistance du circuit.

Lorsque le circuit n'a que de la résistance, la f. e. m. appliquée ou extérieure et la f. e. m. effective se confondent.

Le f. e. m. de s. i. d'un circuit est égale et de signe contraire au taux de variation du flux magnétique qui traverse le circuit, dû au courant qui circule dans ce dernier, rapporté au temps.

Si lorsque le circuit est parcouru par un courant de valeur instantanée i, le flux qui le traverse est Li, la valeur instantanée de la f. e. m. de s. i. est:

$$e_s = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}.$$

Si la perméabilité magnétique du circuit est constante (air, substances non magnétiques, fer très éloigné de son point de saturation), L est constant et l'on a:

$$e_s = -L\frac{di}{dt}.$$

L est alors *le coefficient de s. i.* du circuit.

Nous admettrons dans ce qui va suivre que L est constant (1).

Nous ne nous occuperons en outre que des f. e. m. et des courants périodiques alternatifs, variant d'une manière continue.

(1) Nous étudierons au chapitre VII, le cas où la perméabilité du milieu n'est pas constante.

Nous appellerons durée d'une *phase complète* ou *d'une période*, le temps que met la valeur de la f. e. m. ou de l'intensité du courant pour passer de zéro à zéro, après avoir atteint toutes les valeurs positives et négatives intermédiaires.

Nous n'envisagerons que des f. e. m. ou des intensités de courant alternatives passant périodiquement par les mêmes valeurs, c'est-à-dire dont les périodes sont toutes identiques.

Si nous prenons pour abscisses, le temps écoulé à partir d'un instant donné, et pour ordonnées les valeurs correspondantes de la f. e. m. nous obtiendrons une courbe représentant la f. e. m. et ayant l'allure de la courbe de la figure 1.

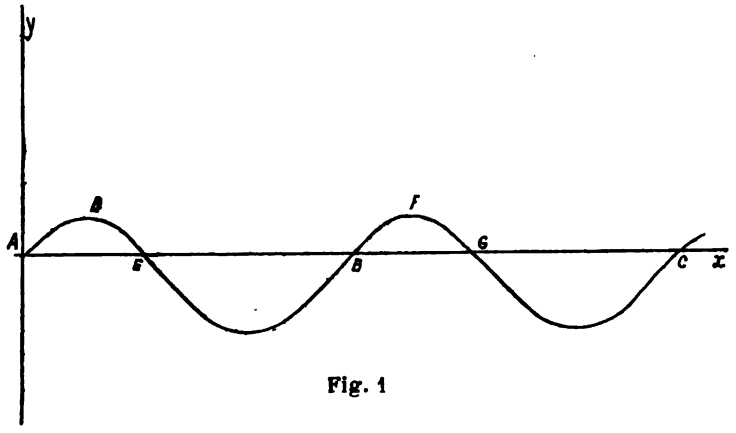


Fig. 1

La longueur AB représentera la durée d'une phase; la portion de courbe ADEB, représentant une période, sera identique à la portion BFGC.

L'équation de la courbe sera:

$$y = e = f(x) = f(t).$$

$f(t)$ étant une fonction périodique alternative.

La fonction périodique alternative la plus simple est la fonction périodique sinusoïdale que l'on peut représenter par l'équation:

$$e = A \sin kt.$$

dans laquelle A et k sont des constantes, nous l'appellerons *fonction*

périodique simple, la f. e. m. représentée par une telle fonction sera une f. e. m. *périodique simple.*

Supposons qu'une f. e. m. appliquée alternative agisse sur un circuit pourvu de s.i.

Si L est le coefficient de s. i. du circuit, et i la valeur instantanée du courant, on aura :

$$e_s = - L \frac{di}{dt}$$

Il est facile de voir que tant que l'intensité du courant augmente (c'est-à-dire tant que l'on a $\frac{di}{dt} > o$), la f. e. m. de s. i. est opposée à la f. e. m. effective (qui produit le courant) tandis que quand l'intensité du courant diminue $\left(\frac{di}{dt} < o\right)$, la f. e. m. de s. i. est de même sens que la f. e. m. effective.

Quand la f. e. m. effective a passé par sa valeur maximum positive, elle diminue tout en restant positive, puis elle passe par zéro et devient négative, en augmentant en valeur absolue, donc pendant tout ce temps la f. e. m. de s. i. est positive. Quand la f. e. m. effective passe par zéro la f. e. m. de s. i. étant positive, la f. e. m. appliquée (qui, et combinée avec celle de s. i., donne la f. e. m. effective) doit donc être négative, c'est-à-dire qu'elle doit déjà avoir passé par zéro.

La s. i. a donc pour effet de faire retarder la phase de la f. e. m. effective (et par conséquent celle du courant) par rapport à la f. e. m. extérieure ; elle produit par suite *un décalage de phase en arrière.*

Si dans un circuit parcouru par un courant continu, on intercale un condensateur, ce dernier commence par se charger jusqu'à ce que ses bornes soient à une différence de potentiel égale à celle de la source, puis aucun courant ne circule.

Il n'en est pas de même, dans le cas d'un condensateur intercalé dans un circuit soumis à l'action d'une f. e. m. alternative ; à chaque inversion de courant, le condensateur se charge et se décharge.

L'intensité du courant dépend de la capacité du condensateur, car ce dernier doit absorber le flux électrique total.

Si C est la capacité du condensateur, V la différence de potentiel à ses bornes, q la quantité d'électricité ou la charge, on a par définition $q = C. V$;

Si dq est la quantité d'électricité qui pénètre dans le condensateur pendant le temps dt, ou qui en sort, et i l'intensité du courant au même instant, cette quantité d'électricité peut également être exprimée par idt. Nous aurons donc :

$$dq = idt$$

d'où :

$$C\,dV = dq = idt.$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{C}.$$

La différence de potentiel aux bornes d'un condensateur intercalé dans un circuit, agit comme une f. e. m. opposée à la f. e. m. effectives.

Quand le courant (ou la f. e. m. effective) est positif, le condensateur se charge et la différence de potentiel de ses bornes augmente. Quand le courant a une intensité nulle, c'est que la différence de potentiel aux bornes du condensateur, est égale à la f. e. m. appliquée. Celle-ci doit donc être positive.

La capacité a donc pour effet d'avancer la phase du courant (ou de la f. e. m. effective) sur la phase de la f. e. m. appliquée.

Il y a donc encore décalage de phase, mais dans un sens opposé à celui que produit la s. i.

Un circuit étant soumis à une différence de potentiel ou f. e. m. constante, on peut faire varier l'intensité du courant, en faisant varier soit sa résistance, soit sa capacité, soit sa s. i., soit à la fois sa résistance, sa capacité et sa s. i.

On obtient ainsi, un courant variable, mais ayant toujours le même sens.

Lorsqu'on applique à un circuit, possédant de la s. i., une f. e. m. constante E, le courant n'atteint pas instantanément sa valeur définitive. En effet, on sait qu'à chaque instant il se développe dans le circuit, une f. e. m. de s. i.:

$$e_s = -L\frac{di}{dt}.$$

La f. e. m. effective est donc :

$$e_c = E + e_s = E - L\frac{di}{dt}$$

En appliquant la loi de Ohm, on a :

$$E - L\frac{di}{dt} = ri.$$

$$E = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Le travail instantané de la f. e. m. sera :

$$Ei = ri^2 + L\,i\frac{di}{dt}.$$

et comme :

$$Li\,di = \frac{L}{2}\,.\,di^2.$$

$$Ei\,dt = ri^2\,dt + \frac{L}{2}\,di^2.$$

Sous cette forme, on voit qu'une partie du travail est dépensée pour vaincre la résistance du circuit, l'autre partie servant à accroitre l'énergie intrinsèque. Quand le régime permanent est établi, le courant est i_1, et on a :

$$E = ri_1.$$

L'énergie intrinsèque est alors :

$$\int_0^{i_1} \frac{L}{2}\,di^2 = \frac{Li_1^2}{2}$$

L'intensité du courant i, qui circule dans le circuit pendant la période variable, est moindre que celle du courant qui y circule quand le régime permanent est établi, les choses se passent donc comme si la résistance du circuit avait augmenté (1).

On a :

$$i_1 = \frac{E}{r}.$$

$$i = \frac{E}{r} - \frac{L}{r}\,\frac{di}{dt} = \frac{E}{r'}$$

$$r' = \frac{E}{E - L\dfrac{di}{dt}}\,r.$$

Pour trouver la valeur de l'intensité du courant il faut intégrer l'équation :

(1) Dans le raisonnement ci-dessus, on suppose que le courant est uniformément réparti dans le conducteur. (Voir à ce sujet les observations de la page 36).

$$E = ri + L\frac{di}{dt}.$$

$$E\,dt - ri\,dt = L\,di$$

$$\frac{di}{E - ri} = \frac{dt}{L}.$$

$$\int_0^i \frac{di}{E - ri} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

$$-\frac{1}{r}\,\text{Log. nep.}\,\frac{E - ri}{E} = \frac{t}{L}$$

$$i = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-\frac{rt}{L}}\right)$$

On voit que, théoriquement, le courant n'atteint jamais le régime permanent pour lequel on a, $i_1 = \frac{E}{r}$, mais pratiquement $e^{-\frac{rt}{L}} = \frac{1}{e^{\frac{rt}{L}}}$ diminue rapidement et au bout de quelques instants ce terme peut être négligé.

Si la force électromotrice cesse brusquement d'agir, le circuit conservant la même résistance, le courant ne cesse pas instantanément, mais son intensité diminue progressivement, on a ce que l'on appelle l'*extra-courant d'ouverture* (si l'on rompt le circuit, ce courant se manifeste sous forme d'étincelle).

La f. e. m. effective est alors la f. e. m. de s. i. :

$$-L\frac{di}{dt}, \quad \text{(ici } \frac{di}{dt} \text{ est négatif).}$$

On a donc :

$$ri = -L\frac{di}{dt}.$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{r}{L}\,dt.$$

Il faut intégrer de $i = i_1 = \frac{E}{r}$ à $i = i$ et de $t = o$ à $t = t$.

$$\int_{i=\frac{E}{r}}^{i=i} \frac{di}{i} = -\frac{r}{L}\int_{o}^{t}$$

$$\text{Log. nep. } \frac{ri}{E} = -\frac{r}{L}t.$$

$$\frac{ri}{E} = e^{-\frac{r}{L}t}.$$

$$i = \frac{E}{r}\, e^{-\frac{r}{L}t}.$$

On voit que théoriquement, le courant met un temps infini pour s'annuler, mais que pratiquement au bout de quelques instants, la valeur de l'intensité peut être négligée.

L'énergie intrinsèque du courant est $\frac{Li_1^2}{2} = \frac{LE^2}{2r^2}$, la somme des travaux instantanés, lors de la cessation du courant, doit avoir la même valeur.

En effet, le travail instantané étant $ri^2\,dt$, la somme sera égale à l'intégrale prise entre les limites $t = o$ et $t = \infty$.

On a :

$$i = \frac{E}{r} \cdot e^{-\frac{r}{L}t}.$$

$$\int_{t=o}^{t=\infty} ri^2\,dt = r\cdot\int_{i}^{o} \frac{E^2}{r^2}\, e^{-\frac{2r}{L}t}\, dt. = \left[-\frac{L\cdot E^2}{2r^2}\, e^{-\frac{2r}{L}t}.\right]_{i}^{o}$$

$$= \frac{L\,E^2}{2r^2}.$$

pendant la durée t, de la période variable d'établissement du courant, la quantité d'électricité, qui agit dans le circuit, est :

$$q = \int_{o}^{t} i\,dt = \frac{E}{r}\int_{o}^{t}\left(1 - e^{-\frac{ri}{L}}\right) dt = \frac{E}{r}\,t + \frac{E}{r}\left[\frac{L}{r}\, e^{-\frac{r}{L}t}.\right]_{o}^{t}$$

$$q = \frac{E}{r}\,t + \frac{EL}{r^2}\, e^{-\frac{rt}{L}} - \frac{E}{r^2}\,L.$$

Pendant la durée t, de la période variable d'ouverture, la quantité d'électricité qui agit dans le circuit, est :

$$q_1 = \int_0^t i\,dt = \frac{E}{r} \cdot \int_0^t e^{-\frac{rt}{L}} = -\frac{EL}{r^2} e^{-\frac{rt}{L}} + \frac{E}{r^2} L.$$

On a donc :

$$q + q_1 = \frac{E}{r} t.$$

La quantité d'électricité mise en mouvement, pendant les périodes variables, est indépendante de L, et égale à celle qui circulerait dans le cas du régime permanent, pendant le même temps.

Nous avons dit au commencement de ce chapitre que, si l'on fait varier d'une façon continue, soit la résistance, soit la s. i. ou ces deux quantités à la fois, quand une f.e.m. constante est appliquée à un circuit, on obtient un courant d'intensité variable.

En effet, si on pose :

$$r = f(t)$$

On aura :

$$i = \frac{E}{f(t)} = \varphi(t)$$

Si on pose : $L = f(t)$, on aura :

$$E = ri + \frac{d}{dt}\left\{ i f(t) \right\} = ri + i.\ \frac{df(t)}{dt} + f(t)\frac{di}{dt}.$$

Si par contre, au lieu de varier d'une façon continue en fonction du temps, r et L varient en fonction de l'intensité du courant, ce dernier atteindra au bout de plus ou moins de temps son régime permanent.

Si : $r = f(i)$, on aura :

$$E = f(i)\, i$$

Si : $L = f(i)$, on aura :

$$E = ri + \frac{d}{dt}\left\{ f(i)\, i \right\}$$

Si : $L = \frac{K}{i}$, on a :

$$E = ri + \frac{d}{dt}(K) = ri$$

et il n'y a plus de période variable.

CHAPITRE II

Le courant périodique simple.

§ 1er. — DÉFINITION DE LA FONCTION PÉRIODIQUE SIMPLE ET TRACÉ DE LA COURBE REPRÉSENTATIVE.

La fonction périodique simple, appelée aussi fonction périodique ondulatoire ou fonction sinusoïdale simple, peut être représentée dans sa forme la plus générale par l'équation :

$$y = y_o \sin (kt - \varphi)$$

Dans laquelle, y_o, k et φ sont des constantes.

En portant en abscisses, les diverses valeurs de t et en ordonnées les valeurs correspondantes de y, la fonction sera représentée par une sinusoïde.

Pour deux valeurs de t, choisies de telle sorte que pour l'une $kt_1 = \beta$ et pour l'autre $kt_2 = \beta + 2\pi$, on aura même ordonnée. Pour deux valeurs de t choisies de telle sorte que $kt_1 = \beta$ et que $kt_2 = \beta + \pi$ les deux ordonnées auront même valeur absolue et seront de signes contraires.

Pour deux valeurs de t, choisies de telle sorte que l'on ait:

$$kt_1 = \frac{(2n+1)}{2}\pi + \alpha \text{ et } kt_2 = \frac{(2n+1)}{2}\pi - \alpha$$

les deux ordonnées seront égales.

Pour :

$$kt - \varphi = \frac{\pi}{2}. \qquad t = \frac{2\varphi + \pi}{2k}$$

On a $y = y_o$ (valeur maximum) :

$$kt - \varphi = \pi \qquad t = \frac{2\varphi + 2\pi}{2k} \qquad y = o$$

$$kt - \varphi = \frac{3\pi}{2} \qquad t = \frac{2\varphi + 3\pi}{2k} \qquad y = -y_o$$

(valeur minimum).

En général si n représente un nombre entier :

pour

$$t = \frac{2\varphi + 2n\pi}{2} \qquad y = o$$

pour

$$t = \frac{2\varphi + (2n+1)\pi}{2} \qquad y = \pm y_o$$

La courbe représentative, sera constituée de portions identiques, symétriques par rapport à leur ordonnée maximum en valeur absolue

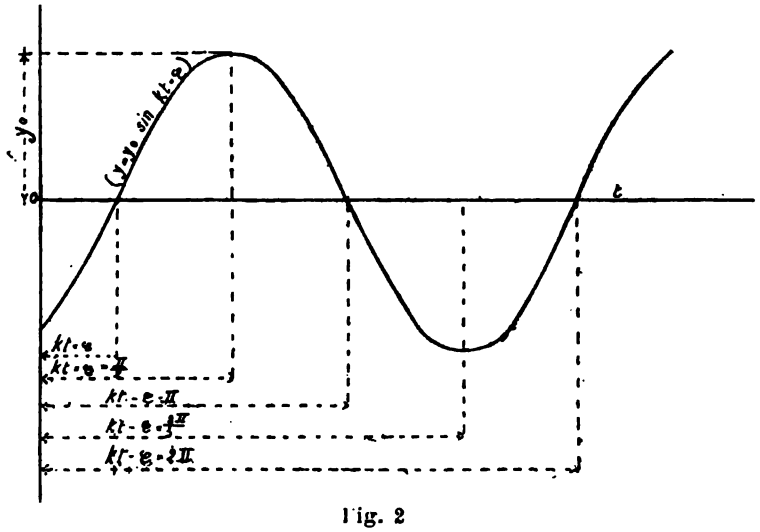


Fig. 2

($\pm y_o$), placées de part et de l'autre de l'axe des x, comme l'indique la figure 2.

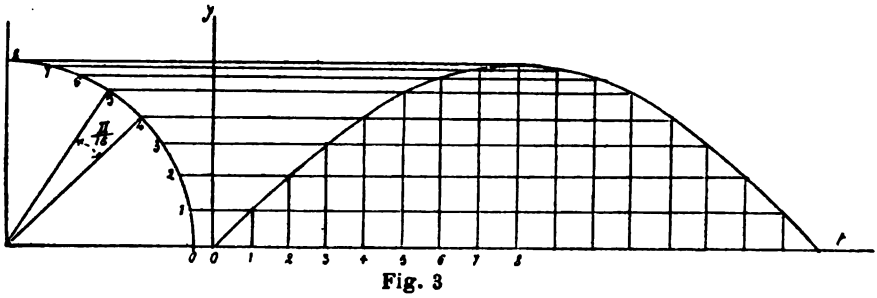


Fig. 3

Cette courbe peut être tracée avec facilité, en employant la mé-

thode indiquée sur la figure 3. On trace un quart de circonférence, de rayon égal à la valeur à l'échelle de y_0, on la divise en n parties égales, et pour chaque point de division, on mène une parallèle à l'axe des temps.

La longueur ot, représentant à l'échelle adoptée la valeur de $t = \frac{\pi}{k}$ sera divisée en $2n$ parties égales. Par les points de division, on mènera des ordonnées jusqu'à leur rencontre avec les parallèles à l'axe des temps, correspondantes.

Les ordonnées élevées aux points de division l et $2n - l$, correspondant toutes deux à la parallèle à l'axe des temps menée par le point de division l de la circonférence.

On peut aussi se servir pour le tracé de la courbe de la table suivante, donnant la valeur des sinus des angles de 10 en 10 degrés.

Angles	Sinus	Angles	Sinus	Angles	Sinus	Angles	Sinus
0	0	50°	0,7660	100°	0,9848	150°	0,5000
10°	0,1736	60°	0,8660	110°	0,9397	160°	0,3420
20°	0,3420	70°	0,9397	120°	0,8660	170°	0,1736
30°	0,5000	80°	0,9848	130°	0,7660	180°	0
40°	0,6428	90°	1,0000	140°	0,6428		

Si T est la durée d'une période, c'est-à-dire si T représente le temps qui s'écoule pour que la fonction passe successivement par toutes ses valeurs, on aura :

$$k\,T = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{T}$$

et la fonction pourra s'écrire :

$$y = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t - \varphi\right)$$

T est la durée de la phase, le nombre de phases par seconde ou la *fréquence* est :

$$F = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}.$$

Les deux tableaux ci-après sont très commodes pour détermine la fréquence d'un courant quand k est donné, ou *vice versa*, pour déduire k de la fréquence donnée :

k	Fréquence ou nombre de phases complètes par seconde	Durée d'une phase complète en secondes		Fréquence	k	Durée d'une phase complète en secondes
1	0,15915	6",283		1	6,28318	1',000
2	0,31831	3,142		2	12,56636	0,500
3	0,47747	2,094		3	18,84954	0,333
4	0,63662	1,571		4	25,13272	0,250
5	0,79575	1,257		5	31,41592	0,200
6	0,95494	1,047		6	37,69911	0,167
7	1,11405	0,898		7	43,98230	0,143
8	1,27324	0,785		8	50,26548	0,125
9	1,43235	0,698		9	56,54867	0,111
10	1,59155	0,628		10	62,83185	0,100

On pourra employer ces tableaux, comme l'indique l'exemple suivant :

Pour un courant, on a $k = 533$, trouver la fréquence.

Pour :

$k = 500$.	79,5750
$k = 30$.	4,7747
$k = 3$.	0,4774
	84,8272

La fréquence sera de 84,8272, à la seconde.

Le tableau suivant donne la valeur de k et la fréquence d'un courant alternatif simple, pour diverses valeurs de la durée d'une phase complète.

Durée d'une phase complète en secondes	K	Fréquence
1,00	6	1
0,50	12	2
0,10	63	10
0,05	125	20
0,01	628	100
0,005	1.256	200
0,001	6.283	1.000
0,0005	12.566	2.000
0,0001	62.832	10.000
0,00001	628.318	100.000
0,000001	6.283.184	1.000.000

Par un simple changement d'origine, la fonction périodique simple peut prendre la forme :

$$y = y_o \sin kt = y_o \sin \frac{2\pi}{T} t$$

il suffit pour cela de déplacer l'origine de :

$$t = \frac{\varphi}{k} = \frac{\varphi T}{2\pi}.$$

La somme ou la différence de deux fonctions périodiques simples de phases identiques, est une fonction périodique simple de même phase, que nous appellerons la résultante.

Soient les deux fonctions périodiques simples :

$$y = y_o \sin (kt - \varphi)$$

On aura :

$$y' = y'_o \sin (kt - \varphi')$$

$$y \pm y' = y_o \sin (kt - \varphi) \pm y'_o \sin (kt - \varphi')$$

$$y \pm y' = \sin kt (y_o \cos \varphi \pm y'_o \cos \varphi') - \cos kt (y_o \sin \varphi \pm y'_o \sin \varphi')$$

Posons :

$$(1)\quad y_o \cos \varphi \pm y'_o \cos \varphi' = y''_o \cos \varphi''.$$

$$(2)\quad y_o \sin \varphi \pm y'_o \sin \varphi' = y''_o \sin \varphi''$$

Nous aurons :

$$y \pm y' = y''_o \sin kt. \cos \varphi'' - y''_o \cos kt. \sin \varphi''$$

$$y \pm y' = y''_o \sin (kt - \varphi'')$$

Des équations (1) et (2) nous tirerons :

$$\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{y_o \sin \varphi \pm y'_o \sin \varphi'}{y_o \cos \varphi \pm y'_o \cos \varphi'}$$

$$y''^2 \left\{ \cos^2 \varphi''^2 + \sin^2 \varphi'' \right\} = y_o^2 \left\{ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right\} + y'^2_o \left\{ \cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi' \right\}$$

$$\pm 2\, y_o\, y'_o\, (\sin \varphi . \sin \varphi' + \cos \varphi . \cos \varphi')$$

$$y''^2 = y_o^2 + y'^2_o \pm 2\, y_o\, y'_o \cos (\varphi - \varphi')$$

La valeur de y'' est toujours réelle, car y''^2 est toujours positif. En effet, la valeur maximum de $\cos (\varphi - \varphi')$ est 1. La valeur minimum de y''^2 sera :

$$y''^2 = y_o^2 + y'^2_o - 2\, y_o\, y'_o = (y_o - y'_o)^2.$$

Si par exemple :

$$y = y_o \sin kt.$$

$$y' = y_o \sin (kt + \pi).$$

On aura :

$$y''^2 = y_o^2 + y_o^2 + 2\, y_o^2 \cos \pi = 2\, y_o^2 - 2\, y_o^2 = 0.$$

Quand deux fonctions périodiques simples de même valeur maximum et de même période, sont décalées d'une demi-période, leur somme est nulle.

La figure 4 représente deux fonctions périodiques simples.

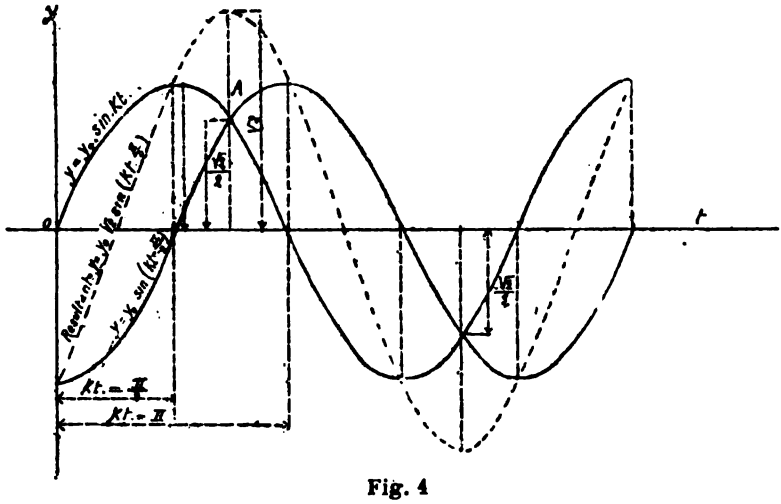


Fig. 4

$$y = y_o \sin kt$$

et :

$$y = y_o \sin \left(kt - \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous aurons :

$$y''^2 = 2\, y_o^2 + 2\, y_o^2 \cos \frac{\pi}{2}. = 2\, y_o^2$$

$$y'' = \sqrt{2}\, y_o.$$

En additionnant les ordonnées des deux courbes, sur la figure, on arrive au même résultat.

En effet, les deux courbes se coupent en A, pour $kt = \frac{3\pi}{4}$.

L'ordonnée de la première courbe étant :

$$y = y_o \sin \frac{3\pi}{3} = 0{,}707\, y_o$$

Celle de la deuxième :

$$y' = y_o \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = y_o \sin \frac{\pi}{4} = 0{,}707\, y_o$$

L'ordonnée de la résultante sera :

$$y'' = y + y' = 1{,}414\, y_o = \sqrt{2}\, y_o.$$

La résultante de deux fonctions périodiques simples de phases différentes, n'est pas une fonction périodique simple, mais elle peut être une fonction périodique.

Soient :

$$y = y_o \sin (kt - \varphi)$$

$$y' = y'_o \sin (k't - \varphi')$$

$$y'' = y + y' = y_o \sin (kt - \varphi) + y'_o \sin (k't - \varphi',$$

quand on aura, n et n' étant des nombres entiers :

$$y'' = y_o \sin (kt - \varphi + 2n\pi) + y'_o, \sin (k't - \varphi' + 2n'\pi)$$

a fonction reprendra la même valeur; on peut écrire :

$$y'' = y_o \sin \left\{ k\left(t + \frac{2n\pi}{k}\right) - \varphi \right\} + y'_o \sin \left\{ k'\left(t + \frac{2n'\pi}{k'}\right) - \varphi' \right\}$$

$$y'' = y_o \sin \left\{ kt_1 - \varphi \right\} + y'_o \sin \left\{ k' t_1 - \varphi' \right\}$$

ce qui exige que :

$$\frac{2n\pi}{k} = \frac{2n'\pi}{k'} \qquad \frac{n}{k} = \frac{n'}{k'}$$

$$n = n' \frac{k}{k'}$$

n' sera le plus petit nombre entier rendant le produit $n' \frac{k}{k'}$ entier.

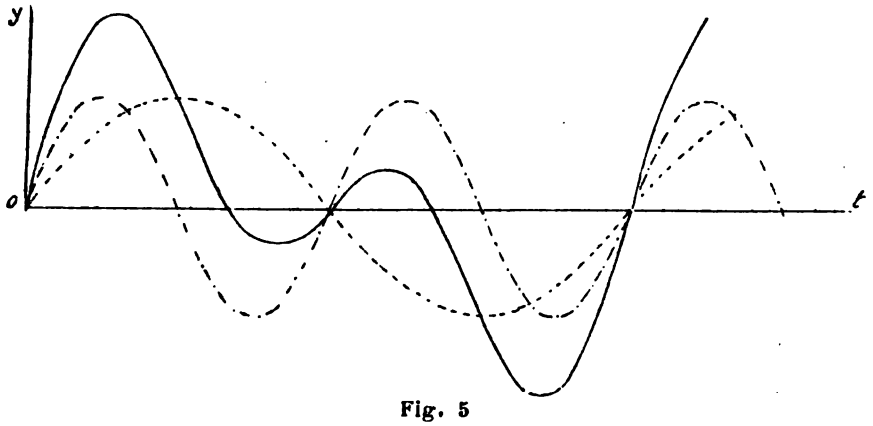


Fig. 5

La courbe de la figure 5 représente la résultante de deux fonctions périodiques simples, pour lesquelles nous avons :

$$y = \sin kt \qquad y' = \sin k' t = \sin 2\, kt.$$

en posant :

$$n = n' \frac{k}{k'} = n' \frac{1}{2}$$

on aura :

$$n' = 2. \qquad n = 1.$$

L'ordonnée moyenne d'une fonction périodique simple est nulle, mais on appelle valeur moyenne de la fonction, la valeur moyenne positive de l'ordonnée pour une demi-phase.

On peut par un changement d'axe et de variable, ramener la fonction à la forme :

$$y = y_o \sin x$$

on aura :

$$y_{moy} = \frac{y_o}{\pi} \int_{x=o}^{x=\pi} \sin x\, dx = \frac{y_o}{\pi} \Big[-\cos x \Big]_{x=o}^{x=\pi} = \frac{2y_o}{\pi}$$

§2. — Calculs préliminaires. — Dans les calculs qui suivront, nous aurons souvent à chercher les valeurs moyennes entre $kt = o$ et $kt = \pi$, des fonctions suivantes :

(1) $\sin (kt \pm \alpha)$ (2) $\sin kt. \cos kt.$

(3) $\sin^2 (kt \pm \alpha)$ (4) $\sin kt. \cos (kt \pm \alpha)$

(5) $\sin (kt \pm \alpha) \cos (kt)$

que nous allons déterminer de suite.

1° *Valeur moyenne de sin* $(kt \pm \alpha)$:

$$y = \sin (kt \pm \alpha) = \sin kt. \cos \alpha \pm \cos kt. \sin \alpha.$$

La valeur moyenne, de $kt = o$ à $kt = \pi$ de $\sin kt$ est $\frac{2}{\pi}$.

La valeur moyenne de $\cos kt$ sera égale à celle de $\cos x$.

$$\frac{1}{\pi} \int_o^{\pi} \cos x. dx = \frac{1}{\pi} \Big[\sin x \Big]_o^{\pi} = o$$

La valeur moyenne de $kt=0$ à $kt=\pi$ de $\sin(kt \pm \alpha$ sera donc :

$$\frac{2}{\pi} \cos \alpha.$$

$$\left[\sin(kt \pm \alpha)\right]_{kt=0}^{kt=\pi} = -\frac{2}{\pi} \cos \alpha$$

2° *Valeur moyenne de* $\sin kt \cos kt$.

$$(\sin kt. \cos kt)_{moy} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x. \cos x \, dx$$

en posant :

$$\sin x = u. \qquad \cos x dx = dv.$$

nous aurons :

$$du = \cos x \, dx \qquad v = \sin x.$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

$$\int_0^{\pi} \sin x. \cos x \, dx = \left[\sin^2 x\right]_0^{\pi} - \int \sin x. \cos x . dx.$$

$$\left[\sin^2 x\right]_0^{\pi} = \sin^2 \pi - \sin^2 0 = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin x . \cos x . dx = 0$$

donc

$$\left[\sin kt. \cos kt\right]_{kt=0}^{kt=\pi} = 0$$

3° *Valeur moyenne de* $\sin^2(kt \pm \alpha)$.

$$\sin^2(kt \pm \alpha) =$$

$$\sin^2 kt \cos^2 \alpha + \cos^2 kt \sin^2 \alpha \mp 2 \sin kt \cos kt \sin \alpha \cos \alpha.$$

La valeur moyenne de $\sin^2 kt$ est :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx.$$

en posant :

$$\sin x = u. \qquad \sin x \, dx = dv.$$

on aura

$$du = \cos x \, dx \qquad v = -\cos x.$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin^2 d x = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

D'après ce qui précède :

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \, dx + \sin x \cos x.$$

Par suite :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Comme la valeur moyenne de $(\sin kt \cos kt)$ est zéro, nous aurons :

$$\left[\sin^2 (kt \pm \alpha)\right]_{kt=0}^{kt=\pi} = \frac{1}{2}(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2}.$$

4° *Valeur moyenne de* :

$$\sin kt \cos (kt \pm \alpha).$$

$$\sin kt \cdot \cos (kt \pm \alpha) = \sin kt \cdot \cos kt \cdot \cos \alpha \mp \sin^2 kt \cdot \sin \alpha$$

la valeur moyenne de $\sin kt \cos kt$ est nulle, nous aurons donc :

$$\left[\sin kt \cdot \cos (kt \pm \alpha)\right]_{kt=0}^{kt=\pi} = \mp \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha.$$

5° *Valeur moyenne de* :

$$\sin (kt \pm \alpha) \cos kt.$$

$$\sin (kt \pm \alpha) \cos kt = \sin kt. \cos kt \cos \alpha \pm \cos^2 kt. \sin \alpha.$$

$$\left[\sin (kt \pm \alpha) \cos kt \right]_{kt=0}^{kt=\pi} = \pm \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

6° ***Dans la théorie des moteurs polyphasés, nous aurons à appliquer les théorèmes suivants, que nous allons démontrer :***

a. La somme des sinus ou des cosinus de n angles formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$ est égale à zéro.

Soient :

$$\Sigma = \sin \alpha + \sin \left(\alpha \pm \frac{2\pi}{n} \right) + \ldots + \sin \left(\alpha \pm \frac{2(n-1)}{n} \pi \right)$$

$$\Sigma' = \cos \alpha + \cos \left(\alpha \pm \frac{2\pi}{n} \right) + \ldots + \cos \left(\alpha \pm \frac{2(n-1)}{n} \pi \right)$$

$$\Sigma = \sin \alpha \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos \frac{2(n-1)}{n} \pi \right\}$$

$$\pm \cos \alpha \left[\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin \left(\frac{2(n-1)\pi}{n} \right) \right]$$

$$\Sigma' = \cos \alpha \left[1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} \ldots + \cos \left(\frac{2(n-1)}{n} \pi \right) \right]$$

$$\pm \sin \alpha \left[\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin \left(\frac{2(n-1)}{n} \pi \right) \right]$$

Il nous suffira donc de démontrer que :

$$A = \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin \left(\frac{2(n-1)}{n} \pi \right) = 0$$

$$B = 1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos \left(\frac{2(n-1)}{n} \pi \right) = 0$$

Comme :

$$\sin\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right) = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = -\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\sin\left(\frac{2(n-2)}{n}\pi\right) = \sin\left(2\pi - \frac{4\pi}{n}\right) = -\sin\frac{4\pi}{n}.$$

tous les termes de A s'annulent donc deux à deux.

Si n est impair, la somme comporte un nombre pair de termes, s'annulant deux à deux ; si n est pair, le terme du milieu est :

$$\sin\left(\frac{2\frac{n}{2}}{n}\pi\right) = \sin\pi = o.$$

On aura donc dans tous les cas $A = o$.

Pour démontrer que B est également nul, nous pouvons l'écrire :

$$B = 1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{2(n-2)}{n}\pi\right)$$

$$B = 1 + \cos\frac{2\pi}{n}\left\{1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\left(\frac{2(n-2)}{n}\pi\right)\right.$$

$$\left. - \sin\frac{2\pi}{n}\right\}\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\left(\frac{2(n-2)}{n}\pi\right)\Big\}$$

$$B = 1 + \cos\frac{2\pi}{n}\left\{B - \cos\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right\} - \sin\frac{2\pi}{n}\left\{A - \sin\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right\}$$

et comme $A = o$, il reste :

$$B = 1 + \cos\frac{2\pi}{n}\left\{B - \cos\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right\} + \sin\frac{2\pi}{n}\sin\left(\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$$

$$B\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) = 1 - \cos\frac{2\pi}{n}\cdot\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$B\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right) = 1 - \cos\left\{\frac{2\pi}{n} + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right\} = 1 - \cos 2\pi = 1 - 1 = o$$

$$B = o$$

b. La somme des sinus ou des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{4\pi}{n}$, est égale à zéro.

Il nous suffira comme dans le cas précédent de démontrer que :

$$A = \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{8\pi}{n} + \ldots\ldots + \sin\frac{4(n-1)}{n}\pi = o$$

$$B = 1 + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{8\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{4(n-1)}{n}\pi = o$$

comme précédemment, les termes de A s'annulent deux à deux, on a :

$$\sin\frac{4\pi}{n} = -\sin\frac{4(n-1)}{n}\pi \quad \text{car :}$$

$$\sin\frac{4(n-1)}{n}\pi = \sin\left(4\pi - \frac{4\pi}{n}\right) = -\sin\frac{4\pi}{n}$$

$$\sin\frac{8\pi}{n} = -\sin\frac{4(n-2)}{n}\pi \quad \text{car :}$$

$$\sin\frac{4(n-2)}{n}\pi = \sin\left(4\pi - \frac{8\pi}{n}\right) = -\sin\frac{8\pi}{n}$$

si n est impair, le terme du milieu est :

$$\sin\left(\frac{4\frac{n}{2}}{n}\pi\right) = \sin 2\pi = o$$

On aura donc dans tous les cas, $A = o$.

Pour démontrer que B est nul, nous pouvons écrire :

$$B = 1 + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\left(\frac{4\pi}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{4\pi}{n} + \frac{4(n-2)\pi}{n}\right)$$

$$B = 1 + \cos\frac{4\pi}{n}\left(1 + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{4(n-2)}{n}\pi\right)$$

$$- \sin\frac{4\pi}{n}\left\{\sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{8\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{4(n-2)}{n}\pi\right\}.$$

d'où :

$$B = 1 + \cos\frac{4\pi}{n}\left(B - \cos\frac{4(n-1)}{n}\right)\pi - \sin\frac{4\pi}{n}\left\{A - \sin\frac{4(n-1)}{n}\pi\right\}$$

et comme $A = 0$.

$$B\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right) = 1 - \cos\frac{4\pi}{n} \cdot \cos\frac{4(n-1)}{n}\pi + \sin\frac{4\pi}{n} \cdot \sin\frac{4(n-1)}{n}\pi$$

$$B\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right) = 1 \cdot \cos\left\{\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{4(n-1)}{n}\pi\right\} = 1 - \cos 4\pi = o.$$

$$B = o.$$

§ 3. — FORCE ÉLECTROMOTRICE PÉRIODIQUE SIMPLE, AGISSANT DANS UN CIRCUIT DÉPOURVU DE CAPACITÉ ET DE SELF-INDUCTION.

Dans un circuit dépourvu de capacité et de s. i., la f. e. m. appliquée et la f. e. m. effective se confondent.

Si dans un circuit de résistance r, agit une f. e. m. appliquée dont la valeur instantanée est donnée par une relation de la forme :

$$e_a = E_a \sin kt.$$

La valeur instantanée de l'intensité du courant sera :

$$i = \frac{e_a}{r} = \frac{E_a}{r} \sin kt.$$

La valeur maximum de la f. e. m. sera :

$$E_a$$

La valeur maximum de l'intensité sera :

$$I = \frac{E_a}{r}$$

La valeur moyenne de la f. e. m. sera (page 18) :

$$E_{moy} = \frac{2E_a}{\pi}$$

La valeur moyenne de l'intensité du courant sera :

$$i_{moy} = \frac{2\,E_a}{\pi r}.$$

La valeur instantanée du travail sera donnée par :

$$e_a i = \frac{E_a^2}{r} \sin^2 kt.$$

La valeur moyenne du travail sera :

$$T_{moy} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{E_a^2}{r} \sin^2 kt.dt = 0{,}50 \frac{E_a^2}{r}.$$

On voit que cette valeur n'est pas égale au produit des valeurs moyennes de l'intensité et de la f. e. m. qui est :

$$\frac{4\,E_a^2}{\pi^2 r} = 0{,}405.\ \frac{E_a^2}{r}$$

On a été ainsi amené à considérer deux nouvelles quantités la *f. e. m. efficace* et *l'intensité efficace*, dont le produit est égal au travail moyen dépensé dans le circuit.

La f. e. m. efficace est la racine carrée du carré moyen de la f. e. m.

$$E_{eff} = \sqrt{\overline{(e_a^2)_{moy}}} = \sqrt{\overline{(E_a^2 \sin^2 kt)_{moy}}} = \frac{E_a}{\sqrt{2}}$$

L'intensité efficace est la racine carrée du carré moyen de l'intensité.

$$i_{eff} = \sqrt{\overline{(i^2)_{moy}}} = \sqrt{\overline{\left\{\left(\frac{E_a \cdot \sin kt}{r}\right)^2\right\}_{moy}}} = \frac{E_a}{r \cdot \sqrt{2}}.$$

On voit que le produit est bien égal au travail moyen.

La déviation de l'électro dynamomètre est, comme nous le verrons, proportionnelle au carré de l'intensité efficace d'un courant périodique simple.

el

B

B

qu

la

On pourra aussi à l'inverse supposer que l'intensité du courant est connue, et en déduire la valeur de la f. e. m. à appliquer au circuit, pour donner naissance à ce courant.

Cette manière de procéder n'est naturellement applicable que quand on suppose le régime permanent établi.

En résolvant les problèmes par cette méthode, on arrive à une équation finale dont la forme la plus générale est la suivante :

$$A \sin kt + B \cos kt + C X \sin (kt - \varphi) + D X \cos (kt - \varphi) = o$$

d'où l'on peut tirer X et φ, en donnant à t diverses valeurs.

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, on aura :

$$B - C X \sin \varphi + D X \cos \varphi = o$$

$$A + C X \cos \varphi + D X \sin \varphi = o$$

En multipliant la premiere relation par C, et en en retranchant la deuxième multipliée par D, on aura :

$$BC - AD - X. \sin \varphi \left| C^2 + D^2 \right) = o$$

d'où

$$(1) \qquad X. \sin \varphi = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$$

En multipliant la première relation par D et la deuxième par C, et en les ajoutant on aura :

$$BD + AC + X \cos \varphi \left| C^2 + D^2 \right) = o$$

$$(2) \qquad X \cos \varphi = - \frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$$

On aura donc en divisant (1) par (2) :

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{AD - BC}{AC + BD}$$

§ 4. — MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES RELATIFS AUX CIRCUITS POURVUS DE CAPACITÉ ET DE SELF-INDUCTION, DANS LESQUELS AGIT UNE FORCE ÉLECTRO-MOTRICE APPLIQUÉE, PÉRIODIQUE SIMPLE.

Comme nous l'avons vu, lorsque le régime permanent est établi, l'effet de la capacité et celui de la s. i., est de décaler le courant (ou la f. e. m. effective) par rapport à la f. e. m. appliquée.

Comme nous le prouverons dans les chapitres suivants, dès que le régime permanent est établi, la f. e. m. effective (ou le courant) est toujours exprimée par une fonction périodique simple (si naturellement, le coefficient de self-induction est constant) c'est-à-dire en somme que la capacité et la s. i. font naitre des f. e. m. périodiques simples de même phase que la f. e. m. extérieure.

En admettant ce principe, les problèmes peuvent être résolus d'une manière très simple, en effet on pourra écrire que le courant (ou la f. e. m. effective) est une fonction du temps, de la forme :

$$i = \mathrm{X}.\ \sin\ (kt - \varphi)$$

La valeur instantanée de la f. e. m. de s. i. sera :

$$\mathrm{L}\frac{di}{dt} = k\ \mathrm{X}\cos\ (kt - \varphi)$$

Si le circuit a de la capacité, on aura :

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt} = \frac{i}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{X}.\ \sin\ (kt - \varphi)}{\mathrm{C}}$$

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{C}}\ .\ \sin\ (kt - \varphi)\ dt$$

et — V sera la force contre-électromotrice due au condensateur.

En appliquant ensuite la loi de Ohm ou les lemmes de Kirchhoff, on pourra établir une relation entre la f. e. m. appliquée (connue) et les f. e.m. de s. i., de capacité, et l'intensité du courant. On arrivera de la sorte à une équation permettant de calculer les deux inconnues X et φ.

On pourra aussi à l'inverse supposer que l'intensité du courant est connue, et en déduire la valeur de la f. e. m. à appliquer au circuit, pour donner naissance à ce courant.

Cette manière de procéder n'est naturellement applicable que quand on suppose le régime permanent établi.

En résolvant les problèmes par cette méthode, on arrive à une équation finale dont la forme la plus générale est la suivante :

$$A \sin kt + B \cos kt + C\,X \sin (kt - \varphi) + D\,X \cos (kt - \varphi) = o$$

d'où l'on peut tirer X et φ, en donnant à t diverses valeurs.

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, on aura :

$$B - C\,X \sin \varphi + D\,X \cos \varphi = o$$

$$A + C\,X \cos \varphi + D\,X \sin \varphi = o$$

En multipliant la premiere relation par C, et en en retranchant la deuxième multipliée par D, on aura :

$$BC - AD - X.\sin \varphi \left| C^2 + D^2 \right) = o$$

d'où

$$(1) \qquad X.\sin \varphi = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$$

En multipliant la première relation par D et la deuxième par C, et en les ajoutant on aura :

$$BD + AC + X \cos \varphi \left| C^2 + D^2 \right) = o$$

$$(2) \qquad X \cos \varphi = -\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$$

On aura donc en divisant (1) par (2) :

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{AD - BC}{AC + BD}$$

En élevant au carré les équations (1) et (2) et en les ajoutant on aura :

$$X^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \frac{(BC - AD)^2 + (AC + BD)^2}{(C^2 + D^2)^2}$$

$$X^2 = \frac{B^2C^2 + A^2D^2 - 2\,ABCD + A^2C^2 + B^2D^2 + 2\,ABCD}{(C^2 + D^2)^2}$$

$$X^2 = \frac{(C^2 + D^2)(A^2 + B^2)}{(C^2 + D^2)^2} = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \tag{4}$$

Les équations 1, 2, 3 et 4 nous serviront ultérieurement pour la résolution d'un grand nombre de problèmes relatifs aux courants alternatifs.

§ 5. — FORCE ÉLECTROMOTRICE PÉRIODIQUE SIMPLE AGISSANT DANS UN CIRCUIT AYANT DE LA SELF-INDUCTION.

Si, $e_a = E_a \sin kt$ est la valeur instantanée de la f. e. m. appliquée au circuit de résistance r, dont le coefficient de s. i. est L, constant en désignant par i la valeur instantanée du courant, nous aurons:

$$e_a - L\frac{di}{dt} = ri$$

$$ri + L\frac{di}{dt} = e_a = E_a \sin kt$$

Equation différentielle du premier ordre.

En posant:

$$i = y.\,z.$$

nous aurons :

$$\frac{di}{dt} = y.\frac{dz}{dt} + z.\frac{dy}{dt}$$

$$ryz + \mathrm{L}.y\frac{dz}{dt} + \mathrm{L}.z\frac{dy}{dt} = \mathrm{E}_a \sin kt$$

$$z\left(ry + \mathrm{L}.\frac{dy}{dt}\right) + \mathrm{L}.y\frac{dz}{dt} = \mathrm{E}_a \sin kt \qquad (1)$$

Choisissons la valeur de y de manière à rendre le terme entre parenthèses nul.

Pour cela, il nous suffira de poser.

$$y = e^{-\frac{r}{\mathrm{L}}t}.$$

on aura

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{r}{\mathrm{L}}\, e^{-\frac{r}{\mathrm{L}}t}.$$

$$r\, e^{-\frac{r}{\mathrm{L}}t}. - \frac{\mathrm{L}.r}{\mathrm{L}}\, e^{-\frac{r}{\mathrm{L}}t} = o$$

pour simplifier posons

$$\frac{r}{\mathrm{L}} = a$$

L'équation (1) deviendra

$$\mathrm{L}.y\frac{dz}{dt} = \mathrm{L}\, e^{-at}\frac{dz}{dt} = \mathrm{E}_a \sin kt$$

$$dz = \frac{\mathrm{E}_a}{\mathrm{L}}\, e^{at} \sin kt\, dt$$

et en intégrant

$$z = \mathrm{C} + \frac{\mathrm{E}_a}{\mathrm{L}}\int e^{at} \sin kt\, dt$$

Pour résoudre l'intégrale posons

$$e^{at}\, dt = dv. \qquad \sin kt = u.$$

$$v = \frac{1}{a}\, e^{at}. \qquad du = k.\cos kt$$

$$\int u.\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int e^{at} \sin kt\, dt. = \frac{1}{a}\, e^{at} \sin kt - \frac{k}{a}\int e^{at} \cos kt.\, dt$$

et en posant

$$e^{at}\,dt = dv' \qquad \cos kt = u'$$

$$v' = \frac{1}{a}\,e^{at}. \qquad du' = -\,k.\,\sin kt.\,dt.$$

nous aurons

$$\int e^{at}\cos kt.\,dt = \frac{1}{a}\,e^{at}\cos kt. - \frac{k}{a}\int e^{at}\sin kt.\,dt.$$

d'où :

$$\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)\int e^{at}\sin kt.\,dt = \frac{1}{a}\,e^{at}\sin kt - \frac{k}{a^2}\cos kt$$

$$\int e^{at}\sin kt.\,dt = \frac{1}{1+\frac{k^2}{a^2}}\,\frac{e^{at}}{a^2}\left\{a\sin kt - k\cos kt\right\}$$

$$z = C + \frac{1}{a^2+k^2}\,e^{at}\,\frac{E_a}{L}\left\{a\sin kt - k\cos kt\right\}$$

$$i = yz = C.\,e^{-at} + \frac{1}{a^2+k^2}\,\frac{E_a}{L}\left\{a\sin kt - k.\cos kt\right\}$$

Le terme e^{-at}, diminue rapidement, de sorte qu'on peut admettre que le régime permanent est pratiquement atteint au bout de quelques instants, on aura alors :

$$i = \frac{1}{a^2+k^2}\,\frac{E_a}{L}\left\{a\sin kt - k\cos kt\right\} = \frac{1}{a^2+k^2}\,\frac{E_a}{L}\left\{a\sin kt + b\sin\left(kt-\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

Sous cette forme, on voit que l'intensité du courant est exprimée par une fonction périodique simple (car il a été démontré que la résultante de deux fonctions périodiques simples de même phase est une fonction périodique simple de même phase, page 14).

La f. e. m. effective, dont la valeur instantanée est ri, est également une fonction périodique simple.

Nous sommes donc autorisés à employer la méthode générale et à poser

$$i = X\sin(kt - \varphi)$$

nous aurons:

$$\frac{di}{dt} = k.\,X\cos(kt - \varphi)$$

L'équation générale de l'induction deviendra

$$rX\,.\,\sin(kt - \varphi) + k\,L\,X.\cos(kt - \varphi) = E_a \sin kt$$

$$E_a \sin kt. - r\,X.\sin(kt - \varphi) - kL.X.\cos(kt - \varphi) = o$$

En nous reportant a l'équation générale, nous aurons

$$A = E_a \qquad B = O \qquad C = -r \qquad D = -kL.$$

Nous aurons donc:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AD}{AC} = \frac{D}{C} = \frac{kL}{r}$$

$$X^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{E_a^2}{r^2 + k^2L^2}$$

$$X = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2\,L^2}}$$

ou bien :

$$i = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2\,L^2}} \sin(kt - \varphi)$$

avec

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{kL}{r}$$

Cette expression de la valeur instantanée du courant, peut être mise sous une autre forme; en effet,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^2\,L^2}{r^2}}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + k^2\,L^2}}$$

d'où

$$\sqrt{r^2 \cdot k^2\,L^2} = \frac{r}{\cos\varphi}.$$

par suite :

$$X = \frac{E_a}{r} \cos \varphi$$

$$i = \frac{E_a}{r} \cos \varphi \sin (kt - \varphi)$$

La f. e. m. effective dont la valeur instantanée est e_e sera :

$$e_e = ri = \frac{r\ E_a}{\sqrt{r^2 + k^2 L^2}} \sin (kt - \varphi) = E_a . \cos \varphi . \sin (kt - \varphi)$$

Comme k, L et r sont essentiellement positifs, le décalage sera toujours compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire entre 0 et 90 degrés.

La valeur instantanée du travail sera :

$$e_a i = \frac{E^2 a}{r} \cos \varphi . \sin kt . \sin (kt - \varphi)$$

$$e_a i = \frac{E^2 a}{r} \cos \varphi \left\{ \sin^2 kt \cos \varphi - \sin kt . \cos kt . \sin \varphi \right\}$$

Le travail moyen sera

$$(e_a i)_{moy} = \frac{E^2 a \cos^2 \varphi}{2r} \qquad \text{(Page 19)}$$

$$(e_a i)_{moy} = \frac{E^2 a}{2r} \frac{r^2}{(r^2 + k^2 L^2)} = \frac{E^2 a}{2} \frac{r}{(r^2 + k^2 L^2)}$$

L'intensité efficace est :

$$i_{eff} = \sqrt{(i^2)_{moy}} = \sqrt{\left(\frac{E^2 a}{r^2} \cos^2 \varphi . \sin^2 (kt - \varphi)\right)_{moy}} = \frac{E_a \cos \varphi}{r . \sqrt{2}} \qquad \text{(Page 20)}$$

$$i_{eff} = \frac{E_a}{r \sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + k^2 L^2}} = \frac{E_a}{\sqrt{2} . \sqrt{r^2 + k^2 L^2}}$$

La f. e. m. efficace sera :

$$(e_e)_{eff} = \sqrt{(e^2_e)_{moy}} = \sqrt{[E^2_a \cos^2 \varphi . \sin^2 (kt - \varphi)]_{moy}} = \frac{E_a \cos \varphi}{\sqrt{2}} \text{ (Page 20)}$$

$$(e_e)_{eff} = \frac{E_a}{\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + k^2 L^2}}$$

Le produit de l'intensité efficace par la f. e. m. efficace est bien égal au travail moyen.

L'intensité moyenne est:

$$i_{moy} = \left\{ \frac{E_a}{r} \cos \varphi . \sin (kt - \varphi) \right\}_{moy}$$

Cette valeur moyenne prise entre $kt - \varphi = o$ et $kt - \varphi = \pi$, est:

$$i_{moy} = \frac{2 E_a}{\pi . r} \cos \varphi = \frac{2 . E_a}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2 L^2}}$$

L'intensité efficace, ainsi que la valeur moyenne de l'intensité du courant, sont identiques à celles qui proviendraient de la même f. e. m. extérieure agissant dans un circuit dépourvu de s. i. et ayant une résistance $\sqrt{r^2 + k^2 L^2}$, c'est pour cela que l'on donne souvent à cette dernière quantité le nom de *résistance apparente* du circuit.

La f. e. m. de s. i. est:

$$e_s = - L \frac{di}{dt} = - \frac{k L E_a}{r} \cos \varphi . \cos (kt - \varphi)$$

Le travail moyen produit par cette f. e. m. sera

$$(e_s i)_{moy} = \left\{ \frac{k . E^2_a}{r^2} \cos^2 \varphi . \sin (kt - \varphi) \cos (kt - \varphi) \right\}_{moy}$$

cette valeur moyenne est égale à zéro (page 19).

L'intensité maximum est

$$I = \frac{E_a}{r} \cos \varphi$$

L'introduction d'une s. i. dans un circuit a donc pour effet, de dimi-

nuer dans le rapport de cos φ à 1, l'intensité moyenne, l'intensité efficace et l'intensité maximum du courant.

Le travail moyen de la source, ainsi que celui dépensé dans le circuit sont diminués dans le rapport de $\cos^2\varphi$ à 1.

L'introduction de la s. i. n'a donc en somme pour résultat d'augmenter la résistance du circuit dans le rapport de $\sqrt{r^2+k^2L^2}$ à r.

En remplaçant k par $\frac{2\pi}{T}$, T étant la durée d'une période (page 12), les équations pourront être mises sous la forme :

$$i = \frac{E_a}{r}\cos\varphi.\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right) = \frac{E_a}{\sqrt{r^2+\frac{4\pi^2}{T^2}L^2}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)$$

La durée du retard est

$$\frac{T}{2\pi}\varphi.$$

On peut encore mettre l'équation sous la forme :

$$i = \frac{E_a}{r\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{L}{r}\right)^2}}\left(\sin\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)$$

On voit sous cette forme, que la résistance apparente pour un nombre d'alternances à la seconde donné qui est :

$$r\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

dépend essentiellement de la *constante de temps* $\frac{L}{r}$ du circuit, il en est de même du retard car

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{kL}{r} = \frac{2\pi}{T}\frac{L}{r}$$

Le décalage est d'autant plus grand que le nombre d'alternances à la seconde est plus élevé, c'est-à-dire que T est plus petit.

Il est facile de tracer les courbes représentant les diverses f. e. m. en fonction du temps. On a :

f. e. m extérieure appliquée $e_a = E_a \sin kt$.

f. e. m de *s. i* $e_s = -\frac{kL}{r} E_a \cos \varphi \cos (kt - \varphi)$

f. e. m effective $e_e = E_a \cos \varphi \sin (kt - \varphi)$

La f. e. m. effective est la résultante de la f. e. m. extérieure et de la f. e. m. de s. i.

$$e_e = e_a + e_s$$

Pour $e_a = e_e$ on a $e_s = o$, e_e est maximum. Il en résulte que, la courbe de la f. e. m.appliquée, coupe la courbe de la f. e. m. effective, aux points où la valeur absolue des ordonnées de cette dernière est maximum.

Pour $e_e = o$ on a $e_a = e_s$, et e_s est maximum.

Il en résulte que :

Les points où la courbe de la f. e. m. effective coupe l'axe des temps, correspondent aux maxima de la courbe de la f. e. m. de s. i. et qu'en ces points l'ordonnée de la courbe de la f. e. m. extérieure

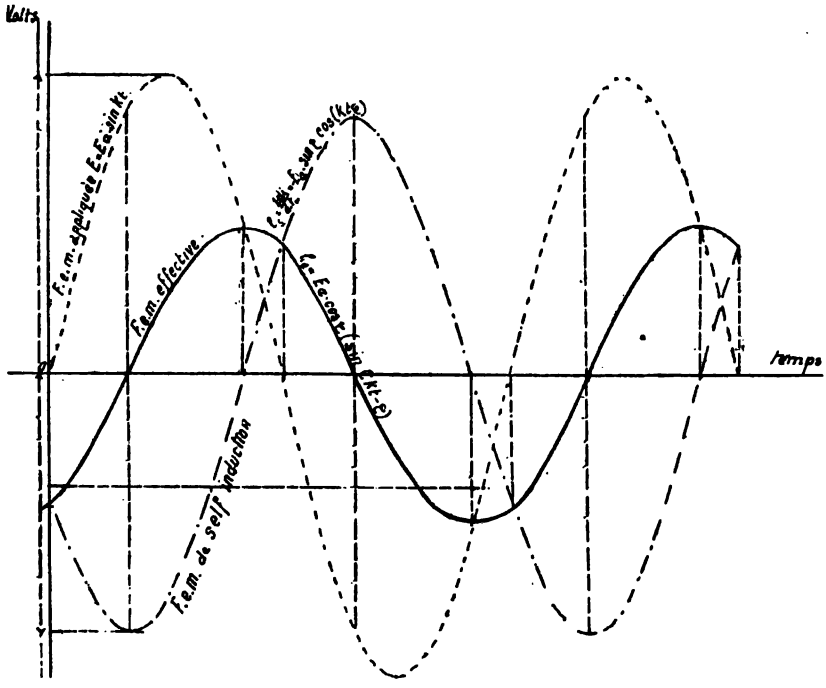


Fig. 6.

est égale et de signe contraire à l'ordonnée de la courbe de la f. e. m. de s. i. (figure 6).

nuer dans le rapport de cos φ à 1, l'intensité moyenne, l'intensité efficace et l'intensité maximum du courant.

Le travail moyen de la source, ainsi que celui dépensé dans le circuit sont diminués dans le rapport de $\cos^2\varphi$ à 1.

L'introduction de la s. i. n'a donc en somme pour résultat d'augmenter la résistance du circuit dans le rapport de $\sqrt{r^2+k^2L^2}$ à r.

En remplaçant k par $\frac{2\pi}{T}$, T étant la durée d'une période (page 12), les équations pourront être mises sous la forme :

$$i = \frac{E_a}{r}\cos\varphi.\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right) = \frac{E_a}{\sqrt{r^2+\frac{4\pi^2}{T}}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\right.$$

La durée du retard est

$$\frac{T}{2\pi}\varphi.$$

On peut encore mettre l'équation sous

$$i = \frac{E_a}{r\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{T^2}\left(\frac{L}{r}\right.}}$$

On voit sous cette forme, que la
nombre d'alternances à la seconde d

$$r\sqrt{1+$$

dépend e de la *co*
en est de n car

$$\varphi =$$

Le décalage est
la seconde est plus
Il est facile de tra
en fonction du temps

f. e. m extérieure appliquée $e_a = E_a \sin kt$.

f. e. m de s. *i* $\quad e_s = -\frac{kL}{r} E_a \cos \varphi \cos (kt - \varphi)$

f. e. m effective $\quad e_e = E_a \cos \varphi \sin (kt - \varphi)$

La f. e. m. effective est la résultante de la f. e. m. extérieure et de la f. e. m. de s. i.

$$e_e = e_a + e_s$$

Pour $e_a = e_e$ on a $e_s = o$, e_e est maximum. Il en résulte que, la courbe de la f. e. m.appliquée, coupe la courbe de la f. e. m. effective, aux points où la valeur absolue des ordonnées de cette dernière est maximum.

Pour $e_e = o$ on a $e_a = e_s$, et e_s est maximum.

Il en résulte que :

Les points où la courbe de la f. e. m. effective coupe l'axe des temps, correspondent aux maxima de la courbe de la f. e. m. de s. i. et qu'en ces points l'ordonnée de la courbe de la f. e. m. extérieure

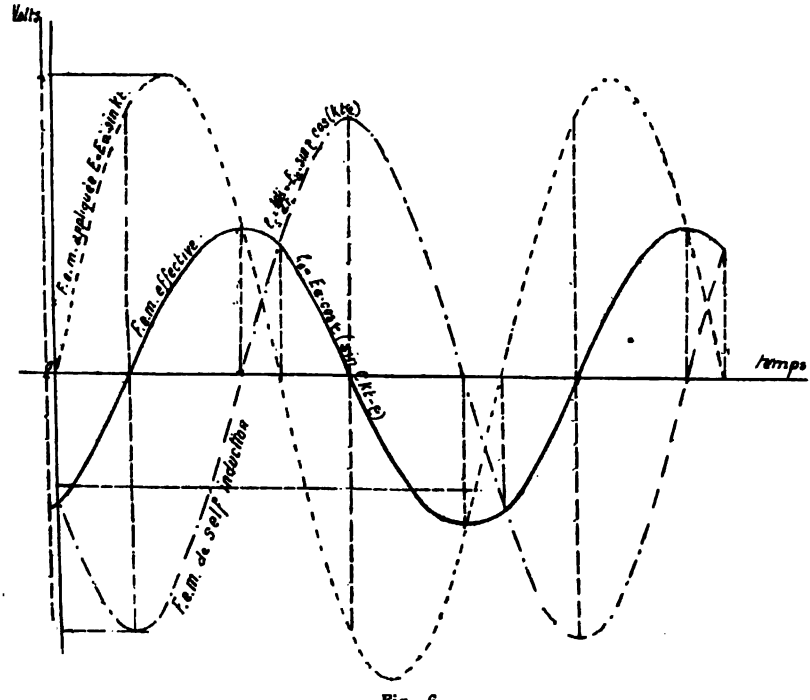


Fig. 6.

gale et de signe contraire à l'ordonnée de la courbe de la f. e. m. (figure 6).

Les conducteurs présentant une grande surface tels que ceux qui ont la forme de bandes, de tubes, de cordes, etc..., offrent moins de résistance au passage d'un courant alternatif, qu'un conducteur cylindrique.

Ceci peut être attribué à la s. i. ; en effet, si l'on suppose le conducteur divisé en une infinité de filets, chacun de ces filets sera parcouru par un courant alternatif et ce courant tendra à induire dans les filets voisins un courant de sens contraire. Ces réactions seront donc plus fortes dans la masse du conducteur où les filets sont plus nombreux qu'à la surface.

Si le conducteur était formé d'un métal magnétique, l'effet serait encore accru.

Sir William Thomson a indiqué dans le tableau suivant, l'augmentation de résistance des conducteurs cylindriques en cuivre de divers diamètres, pour un courant alternatif ayant 160 périodes à la seconde (ce qui correspond à la moyenne des fréquences des courants industriels et à $k = 500$ environ).

DIAMÈTRES EN MILLIMÈTRES	COEFFICIENT
0,5	1,0000
1,0	1,0001
1,5	1,0258
2,0	1,0805
3,0	1,3186
5,0	2,0430
10,0	3,7490
15,0	5,5732
20,0	7,3250

La résistance apparente augmente, comme nous l'avons vu avec la diminution de la durée de la phase du courant alternatif (1).

Dans les cas de grande fréquence, le courant se porte entièrement

(1) Consulter à ce sujet: les études de M. Brylinski, sur la f. e. m. nécessaire pour produire un courant d'intensité variable le long d'un conducteur cylindrique. L'Électricien année 1890. N° 335 p. 97 et N° 359 p. 193.

à la surface, c'est ainsi que l'on peut expliquer l'inocuité des courants alternatifs à hauts potentiels et à grandes fréquences qui, ne pénétrant pas dans le corps, n'intéressent pas les nerfs (1).

M. le professeur E. Gérard a calculé le coefficient de s. i. d'un circuit formé par deux conducteurs cylindriques (2) parallèles. Le coefficient est par unité de longueur

$$L_i = 2\left(2\,\mu.\,\log_{nep}\frac{d}{r} + \mu'\right)$$

r est le rayon des conducteurs, d l'écartement de leurs axes, μ la perméabilité du milieu qui environne les fils et μ' la perméabilité du métal dont ils sont constitués.

Dans le cas de conducteurs en cuivre, suspendus dans l'air on a sensiblement

$$L'_i = 2\left(2\,\log_{nep}\frac{d}{r} + 1\right)$$

M. Eric Gérard fait les observations suivantes relativement à ces formules.

On remarquera que l'expression logarithmique donnant la valeur du flux dans l'espace, qui sépare les conducteurs, montre que l'induction diminue rapidement à mesure qu'on s'écarte de ceux-ci, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain écartement des conducteurs, on n'accroit pas sensiblement le flux en augmentant leur distance.

On peut donc dire que dans un circuit de forme quelconque, la s. i. est proportionnelle à la longueur des conducteurs qui composent le circuit, pourvu que ceux-ci soient suffisamment éloignés.

La part du coefficient de s. i. due aux dimensions en section de chaque conducteur est simplement exprimée par μ'. Cette quantité est négligeable lorsque μ étant égal à μ', la distance d est grande relativement à r, ou encore lorsque la perméabilité μ est très considérable vis à vis de μ'. On a un exemple du premier cas, dans deux fils de cuivre tendus dans l'air, à la manière des fils télégraphiques.

(1) Voir la communication de M. le docteur A. d'Arsonval, sur les effets physiologiques de l'état variables et des courants alternatifs en particulier. Bulletin de la société internationale des électriciens du mois d'Avril 1892. N° 87.

(2) Eric Gérard, Leçons sur l'électricité. Tome 1 page 227 et suivantes.

Le second cas est réalisé dans un conducteur en cuivre enroulé autour d'un noyau en fer, de grand diamètre.

Le tableau suivant calculé par M. Mordey donne les accroissements apparents de résistance qu'éprouvent les conducteurs cylindriques en cuivre traversés par des courants de périodes décroissantes.

FRÉQUENCES	DIAMÈTRE en millimètres	Accroissements apparents de résistance pour cent.	Intensité du courant en ampères
80	10	Moins de 0,01	55
	15	2 1/2	133
	20	8	220
	25	17 1/2	»
	40	68	»
	100	380	»
	1.000	3.500	»
100	9	Moins de 0.01	45
	13.4	2 1/2	98,5
	18	8	178
	224	17 1/2	»
133	7,75	Moins de 0,01	32
	11,61	2 1/2	74
	15,5	8	131,4
	19,36	17 1/2	»

La dernière colonne indique l'intensité du courant que le conducteur peut transporter, si l'on prend pour base une densité de courant de 70 ampères par centimètre carré.

§ 6. — FORCE ÉLECTROMOTRICE PÉRIODIQUE SIMPLE, AGISSANT DANS UN CIRCUIT DANS LEQUEL EST INTERCALÉ UN CONDENSATEUR.

Si nous désignons, par V, la valeur instantanée de la différence de potentiel aux bornes du condensateur, par $e_a = E_a \sin kt$, la valeur instantanée de la f. e. m_e extérieure, par i la valeur instantanée de

l'intensité du courant et par r la résistance du circuit, nous aurons $e_a = V + ri$ (page 5),
et en différentiant :

$$\frac{dV}{dt} + r\frac{di}{dt} = \frac{de_a}{dt}$$

Or :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dq}{c} = \frac{i}{c}.$$

$$\frac{de_a}{dt} = \frac{d\ (E_a \sin kt)}{dt} = k\ E_a \cos kt.$$

$$\frac{i}{c} + r.\frac{di}{dt} = k\ E_a \cos kt.$$

Equation différentielle du premier ordre, dont la solution pourra être trouvée par le procédé indiqué à la page 28, pour le circuit pourvu de s. i.; on arrivera ainsi à démontrer que lorsque le régime permanent est établi, la valeur instantanée de l'intensité du courant (et par conséquent de la f. e. m. effective) est une fonction périodique simple.

Il en résulte que nous pouvons employer la méthode générale et poser :

$$i = X \sin (kt - \varphi)$$

Nous aurons donc :

$$E_a \sin kt = V + rX \sin (kt - \varphi).$$

$$k\ E_a \cos kt - \frac{dV}{dt} - kr\ X. \cos (kt - \varphi) = o$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{c} = \frac{X}{c} \sin\ (kt - \varphi)$$

$$k\ E_a \cos kt - \frac{X}{c} \sin (kt - \varphi) - kr\ X \cos\ (kt - \varphi) = o.$$

En nous reportant à l'équation générale, nous aurons :

$$A = o \qquad B = k\ E_a \qquad C = -\frac{1}{c} \qquad D = -kr.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AD - BC}{AC + BD} = -\frac{C}{D} = -\frac{1}{kcr}$$

$$x^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{B^2}{C^2 + D^2} = \frac{k^2}{\frac{1}{c^2} + k^2 r^2} E_a^2 = \frac{1}{r^2 + \frac{1}{k^2 c^2}} E_a^2$$

Comme k, c et r sont positifs, la valeur de $tg\ \varphi$ est négative, le courant est décalé en avance, ce que nous avions du reste démontré (page 5).

Nous obtenons donc les mêmes formules que pour le cas du circuit pourvu de s. i. en remplaçant :

$$L, \text{ par } -\frac{1}{k^2 c}$$

Nous aurons :

$$i = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2 c^2}}} \sin\ (kt - \varphi) = \frac{E_a}{r} \cos\varphi .\ \sin\ (kt - \varphi)$$

$$\cos\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2 c^2}}}$$

φ est donc négatif et est compris en valeur absolue entre o et $\frac{\pi}{2}$.

L'intensité efficace sera :

$$\frac{E_a \cos\varphi}{r\sqrt{2}}$$

l'intensité moyenne :

$$\frac{2E_a}{\pi r} \cos\varphi .$$

la f. e. m. efficace :

$$\frac{E_a}{\sqrt{2}} \cos\varphi .$$

a f. e. m. effective moyenne :

$$\frac{2E_a}{\pi} \cos\varphi .$$

Le travail moyen sera encore égal au produit de l'intensité efficace par la f. e. m. efficace.

$$T_m = \frac{E_a^2}{2r} \cdot \cos^2 \varphi.$$

La quantité $\sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2c^2}}$, pourra encore être appelée, ***résistance apparente du circuit.***

L'introduction d'un condensateur dans un circuit a donc pour effet de diminuer dans le rapport de cos φ à 1, l'intensité maximum, l'intensité moyenne et l'intensité efficace.

Le travail moyen de la source, ainsi que celui dépensé dans le circuit, sont diminués dans le rapport de $\cos^2 \varphi$ à 1.

En remplaçant k par sa valeur :

$$k = \frac{2\pi}{T}$$

on aura :

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{T}{2\pi cr}.$$

Le décalage sera donc d'autant plus considérable, que la capacité du condensateur et la résistance du circuit seront plus petites, et que le nombre d'alternances à la seconde sera moins élevé (c'est-à-dire que T sera plus grand).

La valeur instantanée de la différence de potentiel aux bornes du condensateur sera :

$$V = \int \frac{i}{c}\, dt = \frac{E_a}{rc} \cos \varphi \int \sin\,(kt - \varphi)\, dt =$$

$$= -\frac{E_a}{krc} \cos \varphi \cos\,(kt - \varphi) = -E_a \sin \varphi \cdot \cos\,(kt - \varphi)$$

Cette différence de potentiel sera donc toujours plus petite en valeur absolue que la valeur maximum de la f. e. m. extérieure.

On aura :

Force électromotrice appliquée $e_a = E_a \sin kt.$

F. e. m. due à la capacité ou différence de potentiel aux bornes du condensateur

$$e_c = -E_a \sin\varphi \cos(kt - \varphi)$$

F. e. m. effective

$$e_e = E_a \cos\varphi \sin(kt - \varphi).$$

On pourra tracer ces diverses courbes (fig. 7).

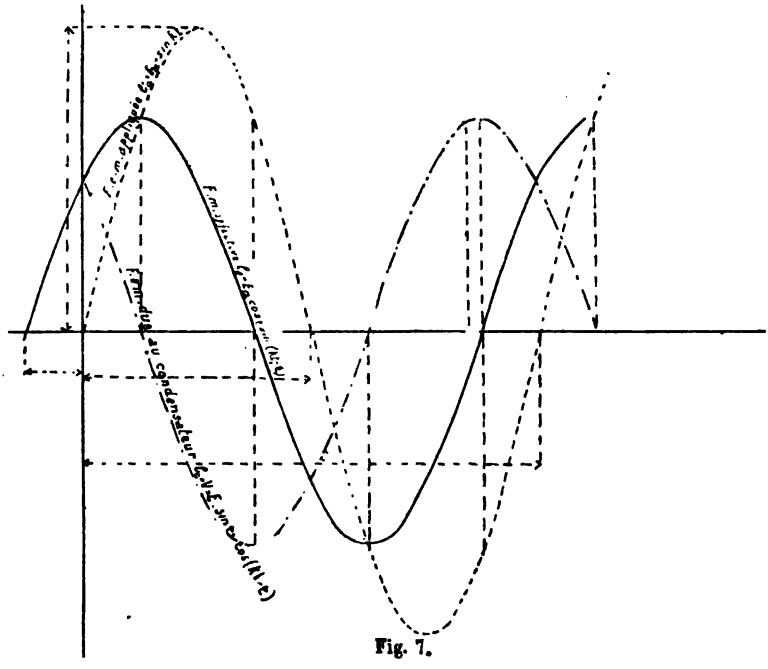


Fig. 7.

On voit que :

Les ordonnées des courbes de la f. e. m. extérieure et de la f. e. m. due au condensateur sont égales et de signes contraires, pour les points dont l'abscisse commune correspond aux points où la courbe de la f. e. m. effective coupe l'axe des x.

Les ordonnées de la courbe de la f. e. m. effective sont maxima en valeur absolue, aux points qui ont mêmes abscisses que les points où la courbe représentant la f. e. m. due au condensateur coupe l'axe des x.

La suppression du condensateur revient à faire c infini dans les for-

mules, c'est en somme couper le circuit et mettre ses extrémités à la terre sans qu'il y ait de résistance au contact.

Le cas de $c = o$, équivaut à la rupture du circuit.

Il reste à vérifier si la capacité du condensateur est suffisante pour absorber le flux de force.

Nous avons :

$$i = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2 c^2}}} \sin (kt - \varphi)$$

Le flux maximum, qu'aura absorbé le condensateur sera évidemment égal à la quantité d'électricité circulant dans le conducteur du moment où le courant est égal à zéro, au moment où ce courant est maximum.

Ce sera :

$$q = \int_{kt - \varphi = o}^{kt - \varphi = \frac{\pi}{2}} i \, dt = \frac{E_e}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2 c^2}}} \int_{kt - \varphi = o}^{kt - \varphi = \frac{\pi}{2}} \sin (kt - \varphi) \, dt$$

$$q = \frac{E_a}{k \sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2 c^2}}}$$

La différence de potentiel aux bornes sera :

$$V = \frac{q}{c} = \frac{\frac{E_a}{kc}}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2 c^2}}} = E_a \sin \varphi.$$

C'est bien la différence de potentiel maximum aux bornes du condensateur, que nous avons trouvée.

C'est donc en somme une vérification de l'exactitude des formules précédentes.

§ 7. — FORCE ÉLECTROMOTRICE PÉRIODIQUE SIMPLE AGISSANT DANS UN CIRCUIT AYANT DE LA SELF-INDUCTION, DANS LEQUEL EST INTERCALÉ UN CONDENSATEUR

Nous avons démontré, et les valeurs trouvées pour les angles de décalage, ont vérifié que la s. i. a pour effet de retarder la période, tandis que l'intercalation d'un condensateur a pour effet de l'avancer. On peut donc prévoir qu'en ajustant convenablement dans un circuit la capacité et la s. i., on peut arriver à faire coïncider la phase du courant avec celle de la f. e. m. appliquée au circuit.

Soient L le coefficient de s. i. du circuit, c la capacité du condensateur intercalé, V la valeur instantanée de la différence de potentiel à ses bornes $e_a = E_a \sin kt$, la valeur instantanée de la f. e. m. appliquée.

Désignons par $i = X \sin (kt - \varphi)$ la valeur instantanée de l'intensité du courant.

Nous pourrons poser l'équation

$$e_a - V - L\frac{di}{dt} = ri$$

$$\frac{di}{dt} = kX \cos (kt - \varphi)$$

$$E_a \sin kt - V - kL X \cos (kt - \varphi) - rX \sin (kt - \varphi) = o$$

En différentiant, nous aurons :

$$k E_a \cos kt - \frac{dV}{dt} + k^2 L X \sin (kt - \varphi) - kr X \cos (kt - \varphi) = o$$

Mais d'autre part, nous avons :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{c} = \frac{X \sin (kt - \varphi)}{c}$$

L'équation deviendra :

$$k E_a \cos kt + k^2 \left\{ L - \frac{1}{k^2 c} \right\} X \sin (kt - \varphi) - kr X \cos (kt - \varphi) = o$$

En nous reportant à la résolution de l'équation générale (page 26), nous aurons :

$$A = 0 \qquad B = k\,E_a \qquad C = k^2\left(L - \frac{1}{k^2 c}\right) \qquad D = -kr$$

$$X^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{k^2}{k^2 r^2 + k^4\left(L - \frac{1}{k^2 c}\right)^2}\,E_a^2$$

$$X = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2\left(L - \frac{1}{k^2 c}\right)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AD - BC}{AC + BD} = -\frac{C}{D} = \frac{k\left(L - \frac{1}{k^2 c}\right)}{r} = \frac{k^2 L c - 1}{krc}$$

Nous aurons donc :

$$i = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2\left(L - \frac{1}{k^2 c}\right)}}\sin(kt - \varphi)$$

Nous obtenons ainsi les mêmes formules que pour un circuit ayant seulement de la s. i., L étant simplement remplacé par $L - \frac{1}{k^2 c}$; nous pouvons donc considérer la capacité c comme une s. i. de valeur $-\frac{1}{k^2 c}$.

Nous pourrons encore mettre i sous la forme.

$$i = \frac{E_a}{r}\cos\varphi.\sin(kt - \varphi)$$

La valeur instantanée de la f. e. m. de s. i. sera :

$$e_s = -\frac{L\,di}{dt} = -\frac{k\,L\,E_a}{r}\cos\varphi.\cos(kt - \varphi)$$

Pour la f. e. m. de capacité, nous aurons :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{c}$$

$$V = \int \frac{i}{c}\,dt = -\frac{E_a}{r}\cos\varphi \int \frac{\sin(kt - \varphi)}{c}\,dt = -\frac{E_a\cos\varphi}{k\,c\,r}\cos(kt - \varphi)$$

Suivant que $\frac{\cos\varphi}{k\,c\,r}$ sera plus grand ou plus petit que l'unité, la valeur de la différence de potentiel maximum aux bornes du condensateur sera supérieure ou inférieure à la valeur maximum de la f. e. m. appliquée.

On peut aussi mettre l'expression de la valeur instantanée de la différence de potentiel aux bornes du condensateur, en valeur absolue, sous la forme

$$V = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2\left(L - \frac{1}{k^2 c}\right)^2}\, kc} \cos(kt - \varphi)$$

La valeur maximum sera :

$$V_{max} = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2\left(L - \frac{1}{k^2 c}\right)^2}\, k\,c} = \frac{E_a}{\sqrt{k^2 r^2 c^2 + (k^2\, c\, L - 1)^2}}$$

$$= \frac{E_a}{\sqrt{k^2 r^2 c^2 + k^4 c^2 L^2 + 1 - 2\, k^2\, c\, L}}$$

Pour $c = \infty$, on aura $V_{max} = 0$. Il est bien évident que le potentiel aux bornes d'un condensateur de capacité infinie est zéro.

Pour c compris entre ∞ et

$$c = \frac{2\,L}{r^2 + k^2\,L^2}$$

on aura :

$$V_{max} < E_a$$

Pour

$$c = \frac{2\,L}{r^2 + k^2\,L^2}$$

on aura :

$$V_{max} = E_a$$

Pour les valeurs de c plus petites que :

$$\frac{2\,L}{r^2 + k^2 L^2}$$

on aura :

$$V_{max} > E_a$$

On obtient la plus grande valeur de V_{max}, quand

$$c = \frac{L}{r^2 + k^2 L^2}$$

dans ce cas :

$$V_{max} = \frac{E_a \sqrt{r^2 + k^2 L^2}}{r}$$

C'est-à-dire que dans ce cas E_a est multiplié par le rapport de la résistance apparente du circuit (due à la s. i.) à la résistance de ce circuit.

Pour $c = 0$ on a $V_{max} = E_a$: $c = 0$ correspond au cas d'un circuit interrompu.

On peut construire les courbes représentant (fig. 8) :

1° La f. e. m. appliquée

$$e_a = E_a \sin kt$$

2° La f. e. m. due à la s. i.

$$e_s = - k L \frac{E_a}{r} \cos \varphi \cos (kt - \varphi)$$

3° La f. e. m. due au condensateur

$$e_c = - V = - \frac{E_a \cos \varphi}{k c r} \cos (kt - \varphi)$$

son maximum sera

$$E_c = \frac{E_a \cos \varphi}{k c r}$$

4° La f. e. m. effective ou agissante

$$e_e = \frac{ri}{r} = E_a \cos \varphi \sin (kt - \varphi)$$

On reconnait facilement que :

1° Les points ou les courbes représentant les f. e. m. dues à la s. i. et à la capacité, coupent l'axe des temps, ont la même abscisse que

les points où la courbe de la f. e. m. effective coupe la courbe de la f. e. m. extérieure.

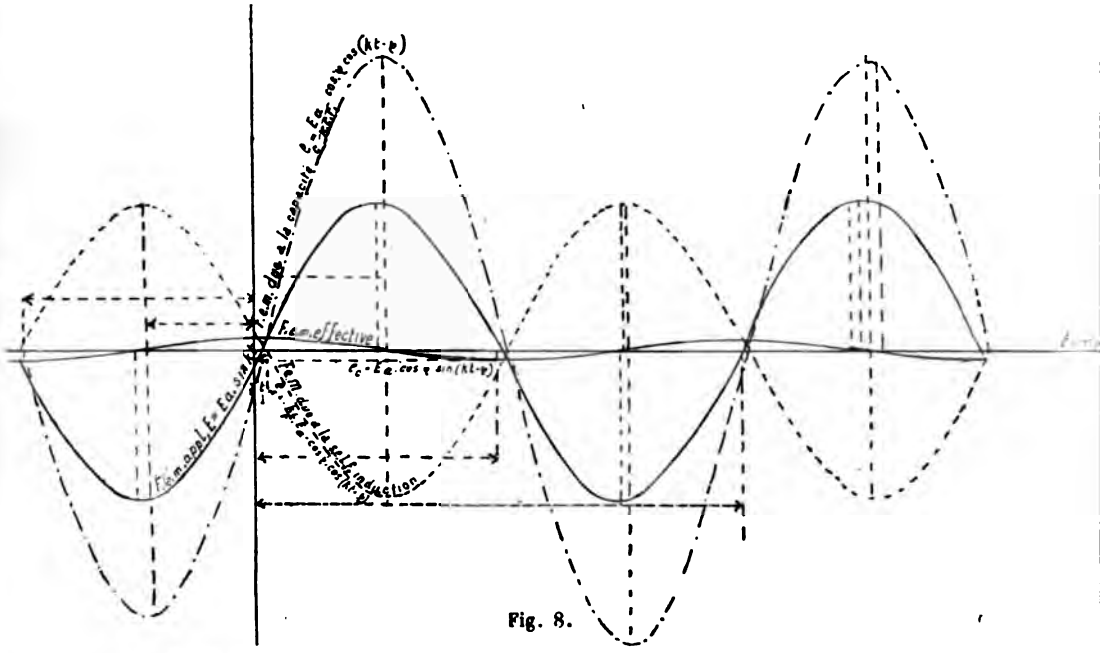


Fig. 8.

Ceci ressort du reste de la condition

$$e_e = e_a + e_e + e_s$$

2° Les points où la courbe représentant la f. e. m. effective coupe l'axe des x, ont même abscisse que les points ou les valeurs absolues des ordonnées des courbes des f. e. m. dues à la s. i. et à la capacité sont maxima.

Un cas particulièrement intéressant est celui pour lequel la f. e. m. effective n'est pas décalée par rapport à la f. e. m. appliquée.

Il faut avoir :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k^2 \mathrm{L}\, c - 1}{kr c} = o$$

$$k^2 \mathrm{L}\, c = 1 \qquad c = \frac{1}{k^2 \mathrm{L}}$$

Dans ce cas là on aura :

$$\mathrm{E}_e = \frac{\mathrm{E}_a}{r} \qquad i = \frac{\mathrm{E}_a}{r} \sin kt$$

$$e_e = e_a$$

La f. e. m. effective sera à chaque instant égale à la f. e. m. appliquée.

La f. e. m. due à la s. i. sera :

$$e_s = -\frac{k\,L\,E_a}{r}\cos kt$$

La f. e. m. due à la capacité sera :

$$e_c = -V = \frac{E_a}{k\,c\,r}\cos kt = -e_s$$

On voit, qu'à chaque instant, les valeurs des f. e. m. dues à la s. i. et à la capacité seront égales et de signes contraires, ces f. e. m. s'annuleront donc.

La valeur maximum de la différence de potentiel aux bornes du condensateur sera, en valeur absolue :

$$E_c = V_{max} = \frac{E_a}{k\,c\,r} = \frac{k\,L\,E_a}{r} = E_s$$

Dans certains cas, comme nous l'avons vu, E_c est plus grand que E_a, c'est-à-dire que la différence de potentiel maximum aux bornes du condensateur dépasse de beaucoup la valeur maximum de la f. e. m. appliquée, ce qui peut amener la destruction du condensateur.

Soit par exemple, $r = 10$ ohms, $E_a = 250$ volts.

$L = 0{,}5$ quadrant, $k = 500$ c'est-à-dire (environ 80 périodes à la seconde).

La capacité c du condensateur à intercaler pour empêcher le décalage, sera:

$$c = \frac{1}{k^2 L} = \frac{1}{500^2 \times 0{,}5} = \frac{1}{125\,000} = 0{,}000\,008$$

$$c = 8 \text{ microfarads}$$

$$E_c = \frac{k\,L\,E_a}{r} = \frac{500 \times 0.5 \times 250}{10} = 6\,250 \text{ volts}$$

L'intensité maximum du courant sera:

$$I = \frac{E_a}{r} = \frac{250}{10} = 25 \text{ ampères}$$

Si le condensateur n'était pas intercalé dans le circuit, on aurait page 24) :

$$i = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2 L^2}} \sin (kt - \varphi)$$

$$I = \frac{E_a}{\sqrt{r^2 + k^2 L^2}}$$

$$I = \frac{250}{\sqrt{10^2 + \overline{500^2} \times \overline{0.5^2}}} = \frac{250}{\sqrt{62\,500}} = \frac{250}{250,2} = 1 \text{ ampère environ.}$$

Pour produire dans un tel circuit, un courant de 25 ampères, il faudrait un alternateur pouvant développer une f. e. m. dont la valeur maximum serait 25 fois plus forte, soit:

$$250 \times 25 = 6250 \text{ volts}$$

On peut donc, en intercalant un condensateur d'une capacité bien proportionnée, réduire considérablement les dimensions de la machine génératrice.

Il faut remarquer que c est fonction de k, si donc l'on a ajusté une capacité de manière à annuler l'effet de la s. i., pour un nombre d'alternances donné à la seconde, le résultat ne sera plus le même, si le nombre d'alternances vient à changer.

Si L est petit, comme on doit avoir pour annuler la s. i. $c = \frac{1}{k^2 L}$, on peut être amené à une valeur de c trop grande pour la pratique, dans ce cas, on peut augmenter artificiellement le coefficient de s.i. L du circuit, en ajoutant par exemple des bobines de faible résistance.

En résumé, si L est le coefficient de s. i. d'un circuit et c la capacité du condensateur intercalé on a:

$$i = \frac{E_a}{r} \cos \varphi . \sin (kt - \varphi) \qquad \text{tg } \varphi = \frac{k^2 L c - 1}{k r c}$$

$$c_e + E_a \cos \varphi \sin (kt - \varphi)$$

L'intensité efficace sera .

$$i_{eff} = \frac{E_a \cos \varphi}{r \sqrt{2}}$$

L'intensité moyenne :

$$i_m = \frac{2\,E_a}{\pi} \cos \varphi$$

La f. e. m efficace :

$$e_{eff} = \frac{E_a}{\sqrt{2}} \cos \varphi$$

La valeur moyenne de la f. e. m effective sera :

$$e_{e\ moy} = \frac{2\,E_a}{\pi} \cos \varphi$$

Le travail moyen dans le circuit, sera égal au travail de la source extérieure et égal au produit de l'intensité efficace, par la f. e. m efficace :

$$T_m = i_{eff}\, e_{eff} = \frac{E_e^2 \cos^2 \varphi}{2\,r}$$

On obtiendra la meilleure utilisation du circuit, en faisant $\cos \varphi = 1$ c'est-à-dire :

$$c = \frac{1}{k^2 L}$$

§ VII. — CIRCUITS DÉRIVÉS AYANT DE LA SELF INDUCTION. APPLICATION AU WATTMÈTRE.

Supposons comme l'indique la figure 9, que deux circuits soient dérivés d'un circuit principal, parcouru par un courant alternatif, dont l'intensité est donnée à chaque instant par la relation.

$$i = I \sin kt$$

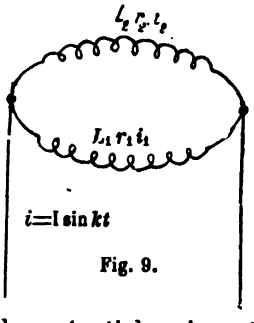


Fig. 9.

Les circuits dérivés ont respectivement des résistances r_1, r_2 et des coefficients de s.i., L_1, L_2. Désignons, par i_1 et i_2, les valeurs instantanées des courants qui y circulent.

Si nous désignons par e, la différence de potentiel agissant aux bornes de la dérivation, nous aurons :

$$i = i_1 + i_2$$

$$e = r_1\, i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$e = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$r_1 i_1 - r_2 i_2 + L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = o$$

De là nous tirons, puisque :

$$i_2 = i - i_1$$

$$\frac{di_2}{di} = \frac{di}{dt} - \frac{di_1}{dt} = k\,I \cos kt - \frac{di_1}{dt}$$

$$i_1 (r_1 + r_2) + (L_1 + L_2) \frac{di_1}{dt} = r_2\, I \sin kt + k\, L_2\, I \cos kt$$

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} i_1 = \frac{r_2\, I}{L_1 + L_2} \sin kt + \frac{k L_2\, I}{L_1 + L_2} \cos kt$$

équation différentielle de la forme:

$$\frac{dy}{dt} \cdot Py = Q$$

Dans laquelle Q est une fonction de t.

En résolvant cette équation, comme l'a fait M. J.-A. Fleming, dans son ouvrage, *The alternate current transformer in theory and pratice*, page 131, on arrive à la solution que nous allons indiquer, en appliquant la méthode générale, dans le cas du régime permanent.

Prenons :

$$i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

nous aurons :

$$i_2 = i - i_1 = I \sin kt - X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

$$\frac{di_1}{dt} = kX_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

$$\frac{di_2}{dt} = k\, I \cos kt - kX_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

L'équation différentielle deviendra :

$$\begin{gathered} - r_2\, I \sin kt - k\, L_2\, I \cos kt + (r_1 + r_2)\, X_1 \sin (kt - \varphi_1) \\ + k\, (L_1 + L_2)\, X_1 \cos (kt - \varphi_1) = o \end{gathered}$$

En nous reportant à la solution de l'équation générale, page 26, nous aurons :

$$A = -r_2 I \qquad C = r_1 + r_2$$

$$B = -k L_2 I \qquad D = k(L_1 + L_2)$$

$$X_1 = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} = \sqrt{\frac{r_2^2 I^2 + k^2 L_2^2 I^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}} = \frac{I\sqrt{r_2^2 + k^2 L_2^2}}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{AD - BC}{AC + BD} = \frac{k(r_1 + r_2) L_2 - k r_2 (L_1 + L_2)}{-r_2 (r_1 + r_2)^2 - k^2 L_2 (L_1 + L_2)}$$

$$= k \frac{r_2 L_1 - r_1 L_2}{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 L_2 (L_1 + L_2)}$$

Par raison de symétrie, si l'on pose :

$$i_2 = X_2 \sin (kt - \varphi_2)$$

on aura :

$$X_2 = \frac{I\sqrt{r_1^2 + k^2 L_1^2}}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = k \frac{r_1 L_2 - r_2 L_1}{r_1 (r_1 + r_2) + k^2 L_1 (L_1 + L_2)}$$

Les valeurs trouvées pour tg φ_1 et tg φ_2, sont de signes contraires et dépendent des valeurs relatives de $r_2 L_1$ et de $r_1 L_2$ ou des constantes de temps des circuits, $\frac{L_1}{r_1}$ et $\frac{L_2}{r_2}$, il est facile de voir que :

Le courant dans la branche ayant la plus grande constante de temps, sera décalé en arrière et le courant dans la branche ayant la plus petite constante de temps, décalé en avant du courant principal.

Si l'on a $\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$, les courants dans les deux branches ne seront pas décalés par rapport au courant principal.

Si

$$r_1 (r_1 + r_2) + k^2 L_1 (L_1 + L_2) = r_2 (r_1 + r_2) + k^2 L_2 (r_1 + r_2)$$

$$r_1^2 - r_2^2 = k^2 (L_2^2 - L_1^2)$$

les courants dans les deux branches seront décalés de la même quantité, par rapport au courant principal, l'un en avance l'autre en retard.

Cherchons la valeur de la f. e. m., agissant aux bornes de la dérivation, nous aurons:

$$e = \frac{L_1 \, di_1}{dt} + r_1 \, i_1$$

en posant:

$$e = X \sin (kt - \theta).$$

Nous aurons:

$$X \sin (kt - \theta) = r_1 \, X_1 \sin (kt - \varphi_1) + k \, L_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

Nous pourrons au moyen de cette équation, déterminer les valeurs de X et de θ.

Pour $kt = o$, nous avons

$$- X \sin \theta = - r_1 \, X_1 \sin \varphi_1 + k L_1 \cos \varphi_1$$

Pour $kt = \frac{\pi}{2}$, nous aurons:

$$X \cos \theta = r_1 X_1 \cos \varphi_1 + k \, L_1 \sin \varphi_1$$

d'où:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-k L_1 \cos \varphi_1 + r_1 \, X_1 \sin \varphi_1}{r_1 X_1 \cos \varphi_1 + k \, L_1 \sin \varphi_1} = \frac{r_1 X_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - k L_1}{r_1 X_1 + k \, L_1 \operatorname{tg} \varphi_1}$$

En portant dans cette équation, la valeur trouvée pour $tg\varphi_1$, nous obtiendrons $tg\theta$, en fonction de $K_1, L_1, L_2, r_1 r_2$.

Pour obtenir X, il suffira d'élever au carré les deux équations et de les ajouter (voir page 22).

Un cas particulier intéressant à étudier est celui où l'une des deux branches n'a pas de s. i., soit, par exemple $L_1 = 0$, on aura alors:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = - k \frac{r_1 L_2}{r_2 (r_1 + r_2) + k_2 L_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = k \frac{r_1 L_2}{r_1 (r_1 + r_2)} = k \frac{L_2}{r_1 + r_2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r_1 X_1 \operatorname{tg}\varphi_1}{r_1 X_1} = \operatorname{tg}\varphi_1$$

$$\varphi_1 = \theta$$

Dans ce cas, ainsi qu'il était à prévoir, le courant circulant dans la branche dépourvue de s. i., n'est pas décalé par rapport à la f. e. m. agissant aux bornes de la dérivation.

Application au wattmètre. — Un wattmètre est un électrodynamomètre avec une bobine fixe, enroulée de gros fil et une bobine mobile, enroulée de fil fin.

Ordinairement, pour mesurer la puissance électrique d'un circuit, on place le wattmètre de la manière suivante :

La bobine de gros fil est mise en série dans le circuit et la bobine de fil fin, en dérivation.

La figure 10 indique cette disposition :

ACB est le circuit, dans lequel on veut mesurer la puissance électrique B_2 et B_1 représentant respectivement la bobine du wattmètre enroulée de gros fil et celle enroulée de fil fin, L'_2, r'_2, L''_2, r''_2, L_1, r_1 désignant la s. i. et la résistance du circuit de la bobine de gros fil, du wattmètre et de la bobine de fil fin.

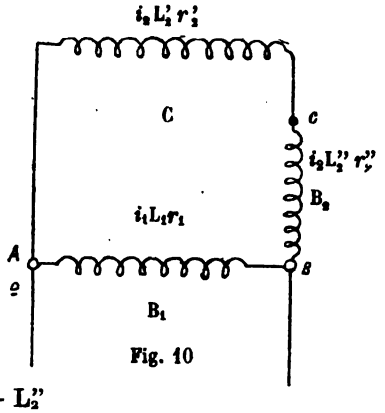


Fig. 10

En faisant :

$$L_2 = L'_2 + L''_2$$

$$r_2 = r'_2 + r''_2$$

nous retombons dans le cas de la dérivation, traité ci-dessus.

Le wattmètre devrait indiquer une quantité proportionnelle à la valeur moyenne de $e.i_2$ ou de $r_2 i_2^2$, en réalité, il indique une quantité proportionnelle à la valeur moyenne de $i_1 i_2$, nous pouvons calculer l'erreur commise.

$$W_m = (r_2 i_2^2)_{moy} = r_2 X_2^2 \sin^2 (kt - \varphi_2)_{moy}$$

d'où (voir page 19) :

$$W_m = \frac{r_2 X_2^2}{2}$$

$$W_m = \frac{r_2}{2} \frac{r_1^2 + k^2 L_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2} I^2$$

La déviation du cadre mobile, étant proportionnelle à la valeur moyenne de $i_1 i_2$, nous aurons :

$$\delta = K (i_1 i_2)_{moy}$$

$$\delta = K \left\{ X_1 \sin (kt - \varphi_1) X_2 \sin (kt - \varphi_2) \right\}_{moy}$$

La valeur moyenne de $\sin (kt - \varphi_1) \sin (kt - \varphi_2)$, est évidemment égale à celle de $\sin kt \sin (kt + \varphi_1 - \varphi_2)$, qui est :

$$\frac{\cos (\varphi_1 - \varphi_2)}{2}$$ (voir page 19)

Nous aurons donc :

$$\delta = \frac{K}{2} X_1 X_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\delta = \frac{K}{2} \left\{ X_1 \cos \varphi_1 X_2 \cos \varphi_2 + X_1 \sin \varphi_1 X_2 \sin \varphi_2 \right\}$$

Or, dans l'équation générale, nous avons (voir pages 26 et 27) :

$$X_1 \sin \varphi_1 = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} = \frac{k (r_2 L_1 - r_1 L_2) I}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

par raison de symétrie, nous aurons :

$$X_2 \sin \varphi_2 = \frac{k (r_1 L_2 - r_2 L_1)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

L'équation générale nous donne :

$$X_1 \cos \varphi_1 = -\frac{AC + BD}{C^2 + D^2} = \frac{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 L_2 (L_1 + L_2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

ison de symétrie :

$$X_2 \cos \varphi_2 = \frac{r_1 (r_1 + r_2) + k^2 L_1 (L_1 + L_2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

$$\delta = \frac{K}{2} \frac{k^2(r_2 L_1 - r_1 L_2)(r_1 L_2 - r_2 L_1) + \{r_2(r_1+r_2) + k^2 L_2(L_1+L_2)\}\{r_1(r_1+r_2) + k^2 L_1(L_1+L_2)\}}{\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2} \frac{k^2(L_1+L_2)^2\{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2\} + (r_1+r_2)^2\{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2\}}{\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2} \frac{(r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2)\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}}{\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2} \frac{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2}{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2} I^2$$

Nous aurons donc :

$$\frac{W_m}{\delta} = \frac{r_2}{K} \frac{r_1^2 + k^2 L_1^2}{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2}$$

$$W_m = \frac{r_1^2 r_2}{K r_1 r_2} \frac{1 + k^2\left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2}{1 + k^2\left(\frac{L_1}{r_1}\right)\left(\frac{L_2}{r_2}\right)} \quad \delta = \frac{r_1}{K} \frac{1 + k^2 C_{t_1}^2}{1 + k^2 C_{t_1} C_{t_2}} \delta$$

En désignant par C_{t_1}, C_{t_2} les constantes de temps des deux circuits.

M. Fleming, qui dans son traité des courants alternatifs arrive à la même formule (1), appelle le facteur de δ, le facteur de correction du wattmètre.

Ce facteur varie avec le nombre d'alternances du courant et avec la s. i. du circuit, dont on mesure la puissance électrique.

Il y a deux cas où ce facteur est une constante, c'est-à-dire indépendant de la s. i. du circuit :

1° Quand $C_1 = o$, c'est-à-dire $L_1 = o$.

Dans ce cas, la phase du courant dans le circuit de la bobine de fil fin, coïncide avec celle de f. e. m. agissant aux bornes de dérivation.

Il n'est donc pas étonnant que ei_2, soit proportionnel à $i_1 i_2$ dans ce cas.

2° Quand $C_{t_1} = C_{t_2}$, c'est-à-dire :

(1) Voir Fleming *The alternate current transformer, in theory and practice* et un mémoire de lord Rayleigh, paru dans le *Philosophical Magazine* de mai 1886, n° 132.

$$W_m = \frac{r_2 X_2^2}{2}$$

$$W_m = \frac{r_2}{2} \frac{r_1^2 + k^2 L_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2} I^2$$

La déviation du cadre mobile, étant proportionnelle à la valeur moyenne de $i_1 i_2$, nous aurons :

$$\delta = K (i_1 i_2)_{moy}$$

$$\delta = K \left\{ X_1 \sin (kt - \varphi_1) X_2 \sin (kt - \varphi_2) \right\}_{moy}$$

La valeur moyenne de $\sin (kt - \varphi_1) \sin (kt - \varphi_2)$, est évidemment égale à celle de $\sin kt \sin (kt + \varphi_1 - \varphi_2)$, qui est :

$$\frac{\cos (\varphi_1 - \varphi_2)}{2}$$ (voir page 19)

Nous aurons donc :

$$\delta = \frac{K}{2} X_1 X_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\delta = \frac{K}{2} \left\{ X_1 \cos \varphi_1 X_2 \cos \varphi_2 + X_1 \sin \varphi_1 X_2 \sin \varphi_2 \right\}$$

Or, dans l'équation générale, nous avons (voir pages 26 et 27) :

$$X_1 \sin \varphi_1 = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} = \frac{k (r_2 L_1 - r_1 L_2) I}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

par raison de symétrie, nous aurons :

$$X_2 \sin \varphi_2 = \frac{k (r_1 L_2 - r_2 L_1)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

L'équation générale nous donne :

$$X_1 \cos \varphi_1 = -\frac{AC + BD}{C^2 + D^2} = \frac{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 L_2 (L_1 + L_2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

et par raison de symétrie :

$$X_2 \cos \varphi_2 = \frac{r_1 (r_1 + r_2) + k^2 L_1 (L_1 + L_2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

$$\delta = \frac{K}{2} \frac{k^2(r_2 L_1 - r_1 L_2)(r_1 L_2 - r_2 L_1) + \{r_2(r_1+r_2) + k^2 L_2(L_1+L_2)\}\{r_1(r_1+r_2) + k^2 L_1(L_1+L_2)\}}{\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2} \frac{k^2(L_1+L_2)^2\{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2\} + (r_1+r_2)^2\{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2\}}{\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2} \frac{(r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2)\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}}{\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2} \frac{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2}{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2} I^2$$

Nous aurons donc :

$$\frac{W_m}{\delta} = \frac{r_2}{K} \frac{r_1^2 + k^2 L_1^2}{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2}$$

$$W_m = \frac{r_1^2 r_2}{K r_1 r_2} \frac{1 + k^2\left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2}{1 + k^2\left(\frac{L_1}{r_1}\right)\left(\frac{L_2}{r_2}\right)} \quad \delta = \frac{r_1}{K} \frac{1 + k^2 C_{t_1}^2}{1 + k^2 C_{t_1} C_{t_2}} \delta$$

En désignant par C_{t_1}, C_{t_2} les constantes de temps des deux circuits.

M. Fleming, qui dans son traité des courants alternatifs arrive à la même formule (1), appelle le facteur de δ, le facteur de correction du wattmètre.

Ce facteur varie avec le nombre d'alternances du courant et avec la s. i. du circuit, dont on mesure la puissance électrique.

Il y a deux cas où ce facteur est une constante, c'est-à-dire indépendant de la s. i. du circuit :

1° Quand $C_1 = o$, c'est-à-dire $L_1 = o$.

Dans ce cas, la phase du courant dans le circuit de la bobine de fil fin, coïncide avec celle de f. e. m. agissant aux bornes de dérivation.

Il n'est donc pas étonnant que ei_2, soit proportionnel à $i_1 i_2$ dans ce cas.

2° Quand $C_{t_1} = C_{t_2}$, c'est-à-dire :

(1) Voir Fleming *The alternate current transformer, in theory and practice* et un mémoire de lord Rayleigh, paru dans le *Philosophical Magazine* de mai 1886, n° 132.

$$W_m = \frac{r_2 X_2^2}{2}$$

$$W_m = \frac{r_2}{2} \frac{r_1^2 + k^2 L_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2} I^2$$

La déviation du cadre mobile, étant proportionnelle à la valeur moyenne de $i_1 i_2$, nous aurons :

$$\delta = K (i_1 i_2)_{moy}$$

$$\delta = K \left\{ X_1 \sin (kt - \varphi_1) X_2 \sin (kt - \varphi_2) \right\}_{moy}$$

La valeur moyenne de $\sin (kt - \varphi_1) \sin (kt - \varphi_2)$, est évidemment égale à celle de $\sin kt \sin (kt + \varphi_1 - \varphi_2)$, qui est :

$$\frac{\cos (\varphi_1 - \varphi_2)}{2}$$ (voir page 19)

Nous aurons donc :

$$\delta = \frac{K}{2} X_1 X_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\delta = \frac{K}{2} \left\{ X_1 \cos \varphi_1 X_2 \cos \varphi_2 + X_1 \sin \varphi_1 X_2 \sin \varphi_2 \right\}$$

Or, dans l'équation générale, nous avons (voir pages 26 et

$$X_1 \sin \varphi_1 = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} = \frac{k (r_2 L_1 - r_1 L_2) I}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

par raison de symétrie, nous aurons :

$$X_2 \sin \varphi_2 = \frac{k (r_1 L_2 - r_2 L_1)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2)^2}$$

L'équation générale nous donne :

$$X_1 \cos \varphi_1 = -\frac{AC + BD}{C^2 + D^2} = \frac{r_2 (r_1 + r_2) + k^2}{(r_1 + r_2)^2 +}$$

et par raison de symétrie :

$$X_2 \cos \varphi_2 = \frac{r_1 (r_1 + r_2) +}{(r_1 + r_2)^2}$$

$$\delta = \frac{K}{2}\frac{k^2(r_2 L_1 - r_1 L_2)(r_1 L_2 - r_2 L_1) + \{r_2(r_1+r_2)+k^2 L_2(L_1+L_2)\}\{r_1(r_1+r_2)+k^2 L_1(L_1+L_2)\}}{\{(r_1+r_2)^2+k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2}\frac{k^2(L_1+L_2)^2\{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2\} + (r_1+r_2)^2\{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2\}}{\{(r_1+r_2)^2+k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2}\frac{(r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2)\{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2\}}{\{(r_1+r_2)^2+k^2(L_1+L_2)^2\}^2} I^2$$

$$\delta = \frac{K}{2}\frac{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2}{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2} I^2$$

Nous aurons donc :

$$\frac{W_m}{\delta} = \frac{r_2}{K}\frac{r_1^2 + k^2 L_1^2}{(r_1+r_2)^2 + k^2(L_1+L_2)^2}$$

$$W_m = \frac{r_1^2 r_2}{K r_1 r_2}\frac{1 + k^2\left(\frac{L_1}{r_1}\right)^2}{1 + k^2\left(\frac{L_1}{r_1}\right)\left(\frac{L_2}{r_2}\right)} \qquad \delta = \frac{r_1}{K}\frac{1 + k^2 C_{t_1}^2}{1 + k^2 C_{t_1} C_{t_2}}\,\delta$$

En désignant par C_{t_1}, C_{t_2} les constantes de temps des deux circuits.

M. Fleming, qui dans son traité des courants alternatifs arrive à la même formule (1), appelle le facteur de δ, le facteur de correction du wattmètre.

Ce facteur varie avec le nombre d'alternances du courant et avec la s. i. du ci… …nt on mesure la puissance électrique.

Il y a de… … ce facteur est une constante, c'est-à-dire indépendant d… …

1° Qua… …$L_1 = o$.

Dan… …nt dans le circuit de la bobine de fil …

… …agissant aux bornes de dérivation.

… …soit proportionnel à $i_1 i_2$ dans ce …

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2}$$

Ordinairement, on admet que le facteur est une constante, que l'on détermine en mesurant la puissance électrique d'un circuit ne possédant pas de s. i., la différénce de potentiel agissant aux extrémités étant connue.

Soit F, le facteur déterminé ainsi, en nous reportant à la figure 10, on voit que l'on a:

$$F = \frac{r_1}{K} \frac{1 + k^2 C_{t_1}^2}{1 + k C^2_{t_1} \frac{L'_2}{r' + r'_2}},$$

puisque L'_2 est nul et que r' est la résistance du circuit.

Si C_{t_2} ou $\frac{L_2}{r_2}$ dans le circuit que l'on mesure est plus grand que $\frac{L_2''}{r' + r_2''}$, le facteur que l'on devrait employer serait plus petit que F (en admettant toujours que le nombre d'alternances à la seconde reste constant), c'est-à-dire que la valeur calculée sera trop grande.

Si au contraire $\frac{L_2}{r_2} < \frac{L_2''}{r' + r_2''}$, la valeur calculée sera moins grande que la valeur réelle.

Le moyen serait d'employer une bobine de fil fin sans s. i., ce qui est impossible à obtenir.

Un autre moyen, consisterait à intercaler dans le circuit de la bobine de fil fin un condensateur annulant l'effet de la s. i. dans ce circuit. Nous traiterons ce cas dans la théorie générale des circuits dérivés.

§ 8. — CAS GÉNÉRAL DES CIRCUITS DÉRIVÉS

Supposons, comme l'indique la figure 11, que deux circuits sont dérivés d'un circuit principal parcouru par un courant dont la valeur instantanée est :

$$i = I \sin kt$$

La résistance et la s. i. de ces circuits sont respectivement r_1, L_1 et

r_2, L_2, dans le premier circuit est intercalé un condensateur de capacité c_1 et dans le deuxième un condensateur de capacité c_2.

Désignons par i_1 et i_2, les valeurs instantanées des courants circulant dans chacune des dérivations. Si e, est la différence de potentiel aux bornes de la dérivation, nous aurons à chaque instant :

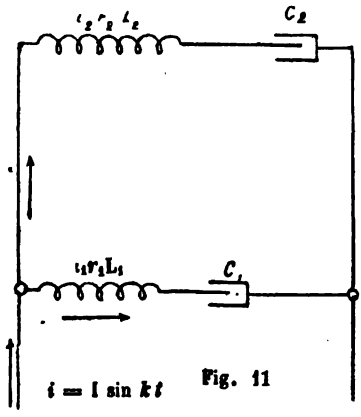


Fig. 11

$$e = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + V_1$$

$$e = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + V_2$$

$$i_2 = i - i_1$$

$$r_1 i_1 - r_2 i_2 + L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + V_1 - V_2 = o$$

En prenant la dérivée par rapport au temps, nous aurons :

$$r_1 \frac{di_1}{dt} - r_2 \frac{di_2}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{dV_1}{dt} - \frac{dV_2}{dt} = o$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{i_1}{c_1} \qquad \frac{dV_2}{dt} = \frac{i_2}{c_2}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt} - \frac{di_1}{dt} \qquad \frac{d^2 i_2}{dt^2} = \frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{i_2}{c_2} = \frac{i}{c_2} - \frac{i_1}{c_2}$$

L'équation deviendra donc :

$$-\frac{i}{c_2} - r_2 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + i_1 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c_2}\right) + \frac{di_1}{dt}(r_1 + r_2) + \frac{d^2 i}{dt^2}(L_1 + L_2) = o$$

Posons :

$$i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

Nous aurons :

$$i = I \sin kt$$

$$\frac{di}{dt} = k\,I\cos kt \qquad \frac{di_1}{dt} = k\,X_1\cos(kt-\varphi_1)$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} = -k^2\,I\sin kt \qquad \frac{d^2i_1}{dt^2} = -k^2\,X_1\sin(kt-\varphi_1)$$

L'équation deviendra :

$$-\frac{I}{c_2}\sin kt - kr_2 I\cos kt + k^2 L_2\,I\sin kt + \left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)X_1\sin(kt-\varphi_1) +$$

$$k(r_1+r_2)\,X_1\cos(kt-\varphi_1) - k^2(L_1+L_2)\,X_1\sin(kt-\varphi_1) = o.$$

$$k^2\left(L_2-\frac{1}{k^2c_2}\right)I\sin kt - kr_2 I\cos kt - k^2\left\{L_1-\frac{1}{k^2c_1}+L_2-\frac{1}{k^2c_2}\right\}X\sin(kt-\varphi_1)$$

$$+k(r_1+r_2)\,X_1\cos(kt-\varphi_1)$$

Remplaçons :

$$L_1-\frac{1}{k^2c_1} \text{ par } \lambda_1 \text{ et } L_2-\frac{1}{k^2c_2} \text{ par } \lambda_2$$

nous aurons :

$$k\lambda_2 . I\sin kt - r_2 I\cos kt - k(\lambda_1+\lambda_2)X_1\sin(kt-\varphi_1) + (r_1+r_2)X_1\cos(kt-\varphi_1) = o$$

En nous reportant à l'équation générale (page 27), nous aurons :

$$A = k\lambda_2 I \qquad C = -k(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$B = -r_2 I \qquad D = r_1 + r_2$$

Nous aurons donc :

$$X_1^2 = \frac{A^2+B^2}{C^2+D^2} = \frac{r_2^2+k^2\lambda_2^2}{(r_1+r_2)^2+k^2(\lambda_1+\lambda_2)^2}I^2$$

Par raison de symétrie, on aurait eu en posant :

$$i_2 = X_2\sin(kt-\varphi_2)$$

$$X_2^2 = \frac{r_1^2+k^2\lambda_1^2}{(r_1+r_2)^2+k^2(\lambda_1+\lambda_2)^2}I^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{AD - BC}{AC + BD} = \frac{k\lambda_2 (r_1 + r_2) - kr_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) - r_2 (r_1 + r_2)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = k \frac{r_2 \cdot \lambda_1 - r_1 \lambda_2}{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Par raison de symétrie, on aura :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = k \frac{r_1 \lambda_2 - r_2 \lambda_1}{r_1 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

On retrouve les mêmes formules qu'au paragraphe précédent (page 53), où nous considérions des dérivations n'ayant que de la s. i., en remplaçant L_1 par λ_1 et L_2 par λ_2, ce qui du reste n'est pas étonnant, puisque l'on peut considérer une capacité c, comme une s. i. de valeur $-\frac{1}{k^2 c}$.

Ici l'un des courants n'est pas nécessairement décalé en avance, et l'autre en retard par rapport au courant principal, car les valeurs de $tg\varphi_1$ et $tg\varphi_2$ ne sont pas nécessairement des signes contraires, les dénominateurs pouvant être l'un négatif, l'autre positif.

Cherchons la valeur de la f. e. m. qui agit aux bornes de la dérivation, nous avons :

$$e = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + V_1$$

posons :

$$e = \Sigma \sin (kt - \theta)$$

$$\Sigma \sin (kt - \theta) = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + V_1$$

en prenant la dérivée par rapport à t, nous aurons :

$$k \Sigma \cos (kt - \theta) = r_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{di_1^2}{dt} + \frac{dV_1}{dt}$$

$$k \Sigma \cos (kt - \theta) = kr_1 X_1 \cos (kt - \varphi_1) - k^2 L_1 X_1 \sin (kt - \varphi_1) + \frac{1}{c_1} X_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

$$\Sigma \cos (kt - \theta) = r_1 X_1 \cos (kt - \varphi_1) - k \left(L_1 - \frac{1}{k^2 c_1} \right) X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

$$L_1 - \frac{1}{k^2 c_1} = \lambda_1$$

$$\Sigma \cos (kt - \theta) = r_1 X_1 \cos (kt - \varphi_1) - k \lambda_1 X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

Faisons successivement dans cette équation, $kt = \frac{\pi}{2}$ et $kt = o$, nous aurons :

$$\Sigma \sin \theta = r_1 X_1 \sin \varphi_1 - k \lambda_1 X_1 \cos \varphi_1$$

$$\Sigma \cos \theta = r_1 X_1 \cos \varphi_1 + k \lambda_1 X_1 \sin \varphi_1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r_1 X_1 \sin \varphi_1 - k \lambda_1 X_1 \cos \varphi_1}{r_1 X_1 \cos \varphi_1 + k \lambda_1 X_1 \sin \varphi_1} = \frac{r_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - k \lambda_1}{r_1 + k \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_1}$$

comme :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = k \frac{r_2 \lambda_1 - r_1 \lambda_2}{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

nous aurons :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k r_1 (r_2 \lambda_1 - r_1 \lambda_2) - k \lambda_1 \left\{ r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \right\}}{r_1 \left\{ r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \right\} + k^2 \lambda_1 (r_2 \lambda_1 - r_1 \lambda_2)}$$

$$\operatorname{tg} \theta = k \frac{r_1 r_2 \lambda_1 - r_1^2 \lambda_2 - r_1 r_2 \lambda_1 - r_2^2 \lambda_1 - k^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{r_1 r_2 (r_1 + r_2) + k^2 r_1 \lambda_1 \lambda_2 + k^2 r_1 \lambda_2^2 + k^2 r_2 \lambda_1^2 - k^2 r_1 \lambda_1 \lambda_2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = - k \frac{r_1^2 \lambda_2 + r_2^2 \lambda_1 + k^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{r_1 r_2 (r_1 + r_2) + k^2 (r_1 \lambda_2^2 + r_2 \lambda_1^2)}$$

expression dans laquelle, on peut remplacer $r_1 \lambda_1$ par $r_2 \lambda_2$ et réciproquement.

Pour calculer Σ, élevons au carré les deux équations et ajoutons-les, nous aurons :

$$\Sigma^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = X_1^2 \left\{ r_1^2 (\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) + k^2 \lambda_1^2 (\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) \right.$$

$$\left. + 2 k r_1 \lambda_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - 2 k r_1 \lambda_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \right\}$$

$$\Sigma^2 = X_1^2 (r_1^2 + k^2 \lambda_1^2)$$

$$\Sigma^2 = \frac{(r_1^2 + k^2 \lambda_1^2) (r_2^2 + k^2 \lambda_2^2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2$$

La f. e. m. agissant aux extrémités de la dérivation, est à chaque instant :

$$e = \Sigma . \sin (kt - \theta)$$

on peut donc remplacer la dérivation par une f. e. m. :

$$e = -\Sigma \sin (kt - \theta)$$

Si, la dérivation est placée à l'extrémité d'un circuit ayant un coefficient de s. i. L et une résistance R, dans lequel est intercalé un condensateur de capacité c (fig. 12), on peut chercher quelle est la f. e. m. extérieure à appliquer pour avoir dans le circuit principal un courant $i = I \sin kt$, comme nous l'avons admis.

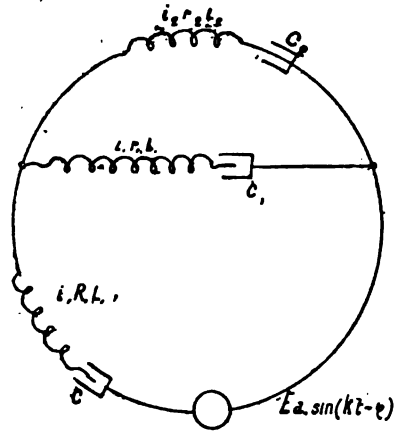


Fig. 12

Désignons par :

$$e_a = E_a \sin (kt - \alpha)$$

la valeur instantanée de la f. e. m. extérieure à appliquer, nous aurons :

$$E_a \sin (kt - \alpha) = R i + L \frac{di}{dt} + V + e$$

$$E_a \sin (kt - \alpha) = R I \sin kt + k L I \cos kt + V + \Sigma \sin (kt - \theta)$$

En prenant la dérivée par rapport au temps, nous aurons :

$$k E_a \cos (kt - \alpha) = k R I \cos kt - k^2 L I \sin kt + \frac{dV}{dt} + k \Sigma \cos (kt - \theta)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{c} = \frac{I \sin kt}{c}$$

Nous aurons :

$$E_a \cos (kt - \alpha) = R I \cos kt - k I \left(L - \frac{1}{k^2 c}\right) \sin kt + \Sigma \cos (kt - \theta)$$

faisons :

$$\lambda = L - \frac{1}{k^2 c}$$

Faisons successivement dans cette équation, $kt = \frac{\pi}{2}$ et $kt = o$, nous aurons :

$$\Sigma \sin \theta = r_1 X_1 \sin \varphi_1 - k \lambda_1 X_1 \cos \varphi_1$$

$$\Sigma \cos \theta = r_1 X_1 \cos \varphi_1 + k \lambda_1 X_1 \sin \varphi_1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r_1 X_1 \sin \varphi_1 - k \lambda_1 X_1 \cos \varphi_1}{r_1 X_1 \cos \varphi_1 + k \lambda_1 X_1 \sin \varphi_1} = \frac{r_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - k \lambda_1}{r_1 + k \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_1}$$

comme :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = k \frac{r_2 \lambda_1 - r_1 \lambda_2}{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

nous aurons :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k r_1 (r_2 \lambda_1 - r_1 \lambda_2) - k \lambda_1 \left\{ r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) \right\}}{r_1 \left\{ r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) + k^2 \lambda_1 (r_2 \lambda_1 - r_1 \lambda_2) \right.}$$

$$\operatorname{tg} \theta = k \frac{r_1 r_2 \lambda_1 - r_1^2 \lambda_2 - r_1 r_2 \lambda_1 - r_2^2 \lambda_1 - k^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{r_1 r_2 (r_1 + r_2) + k^2 r_1 \lambda_1 \lambda_2 + k^2 r_1 \lambda_2^2 + k^2 r_2 \lambda_1^2 - k^2 r_1 \lambda_1 \lambda_2}$$

$$\operatorname{tg} \theta = - k \frac{r_1^2 \lambda_2 + r_2^2 \lambda_1 + k^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{r_1 r_2 (r_1 + r_2) + k^2 (r_1 \lambda_2^2 + r_2 \lambda_1^2)}$$

expression dans laquelle, on peut remplacer $r_1 \lambda_1$ par $r_2 \lambda_2$ et réciproquement.

Pour calculer Σ, élevons au carré les deux équations et ajoutons-les, nous aurons :

$$\Sigma^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = X_1^2 \left\{ r_1^2 (\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) + k^2 \lambda_1^2 (\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) \right.$$

$$\left. + 2 k r_1 \lambda_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - 2 k r_1 \lambda_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \right\}$$

$$\Sigma^2 = X_1^2 (r_1^2 + k^2 \lambda_1^2)$$

$$\Sigma^2 = \frac{(r_1^2 + k^2 \lambda_1^2) (r_2^2 + k^2 \lambda_2^2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2$$

La f. e. m. agissant aux extrémités de la dérivation, est à chaque instant :

$$e = \Sigma . \sin (kt - \theta)$$

on peut donc remplacer la dérivation par une f. e. m.:

$$e = -\Sigma \sin (kt - \theta)$$

Si, la dérivation est placée à l'extrémité d'un circuit ayant un coefficient de s. i. L et une résistance R, dans lequel est intercalé un condensateur de capacité c (fig. 12), on peut chercher quelle est la f. e. m. extérieure à appliquer pour avoir dans le circuit principal un courant $i = I \sin kt$, comme nous l'avons admis.

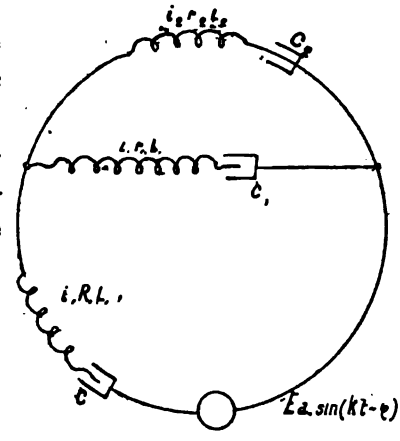


Fig. 12

Désignons par:

$$e_a = E_a \sin (kt - \alpha)$$

la valeur instantanée de la f. e. m. extérieure à appliquer, nous aurons:

$$E_a \sin (kt - \alpha) = R\,i + L\frac{di}{dt} + V + e$$

$$E_a \sin (kt - \alpha) = R\,I \sin kt + k\,L\,I \cos kt + V + \Sigma \sin (kt - \theta)$$

En prenant la dérivée par rapport au temps, nous aurons:

$$k\,E_a \cos (kt - \alpha) = k\,R\,I \cos kt - k^2\,L\,I \sin kt + \frac{dV}{dt} + k\,\Sigma \cos (kt - \theta)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{c} = \frac{I \sin kt}{c}$$

Nous aurons:

$$E_a \cos (kt - \alpha) = R\,I \cos kt - k\,I\left(L - \frac{1}{k^2 c}\right) \sin kt + \Sigma \cos (kt - \theta)$$

faisons:

$$\lambda = L - \frac{1}{k^2 c}$$

nous aurons :

$$E_a \cos(kt - \alpha) = R\,I \cos kt - k\lambda I \sin kt + \Sigma \cos(kt - \theta)$$

faisons successivement $kt = \frac{\pi}{2}$ et $kt = o$, nous aurons :

$$E_a \sin \alpha = -k\lambda I + \Sigma \sin \theta$$

$$E_a \cos \alpha = R\,I + \Sigma \cos \theta$$

Mais, en nous reportant aux équations de la page 62, nous avons :

$$\Sigma \sin \theta = r_i X_i \sin \varphi_i - k\lambda_i X_i \cos \varphi_i$$

$$\Sigma \cos \theta = r_i X_i \cos \varphi_i + k\lambda_i X_i \sin \varphi_i$$

En nous reportant page 26, à l'équation générale, nous aurons :

$$X_i \sin \varphi_i = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} \qquad X_i \cos \varphi_i = -\frac{AC + BD}{C^2 + D^2}$$

$$\Sigma \sin \theta = \frac{r_i(BC - AD) + k\lambda_i(AC + BD)}{C^2 + D^2} = \frac{C(r_i B + k\lambda_i A) + D(\lambda_i B - r_i A)}{C^2 + D^2}$$

$$\Sigma \cos \theta = -\frac{r_i(AC + BD) + k\lambda_i(BC - AD)}{C^2 + D^2} = \frac{C(k\lambda_i B - r_i A) - D(r_i B + k\lambda_i A)}{C^2 + D^2}$$

Mais :

$$A = k\lambda_2 I \qquad C = -k(\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$B = -r_2 I \qquad D = r_1 + r_2$$

d'où :

$$\Sigma \sin \theta = -\frac{k^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) + r_1^2 \lambda_2 + r_2^2 \lambda_1}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} k\,I$$

$$\Sigma \cos \theta = \frac{k^2 (r_1 \lambda_2^2 + r_2 \lambda_1^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I$$

Des équations donnant les valeurs de $E_a \sin \alpha$ et $E_a \cos \alpha$, on tire :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Sigma \sin \theta - k\lambda I}{R\,I + \Sigma \cos \theta}$$

et en remplaçant $\Sigma \sin\theta$ et $\Sigma \cos\theta$ par leurs valeurs :

$$\operatorname{tg}\alpha = -k\,\frac{k^2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)+r_1^2\lambda_2+r_2^2\lambda_1+\lambda\left\{(r_1+r_2)^2+k^2(\lambda_1+\lambda_2)^2\right\}}{R\left\{(r_1+r_2)^2+k^2(\lambda_1+\lambda_2)^2\right\}+k^2(r_1\lambda_2^2+r_2\lambda_1^2)+r_1r_2(r_1+r_2)}$$

Des mêmes équations, en les élevant au carré et en les additionnant, on tire :

$$E_a^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=k^2\lambda^2I^2+\Sigma^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+R^2I^2-2k\lambda I\Sigma\sin\theta+2RI\Sigma\cos\theta$$

$$E_a^2 = k^2\lambda^2I^2+\Sigma^2+R^2I^2+2\,R\,I\,\Sigma\cos\theta-2\,k\,\lambda\,I\,\Sigma\,\sin\,\theta$$

En remplaçant $\Sigma \cos\theta$ et $\Sigma \sin\theta$ par leurs valeurs données ci-dessus et Σ^2 par sa valeur (page 62), on trouve finalement :

$$E_a^2 = I^2\left\{k^2\lambda^2+R^2+\frac{(r_1^2+k^2\lambda_1^2)(r_2^2+k^2\lambda_2^2)}{(r_1+r_2)^2+k^2(\lambda_1+\lambda_2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2k^2\lambda\left[k^2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)+r_1^2\lambda_2+r_2^2\lambda_1\right]+2R\left[k^2(r_1\lambda_2^2+r_2\lambda_1^2)+(r_1r_2)(r_1+r_2)\right]}{(r_1+r_2)^2+k^2(\lambda_1+\lambda_2)^2}\right\}$$

La valeur instantanée du travail fourni par la source extérieure, sera :

$$e_{ai} = E_a\,I\,\sin kt.\,\sin(kt-\alpha) = E_a\,I\left\{\sin^2 kt\,\cos\alpha-\sin kt.\,\cos kt\,\sin\alpha\right\}$$

sa valeur moyenne sera :

$$T_m = (e_{ai})_{moy} = \frac{E_aI}{2}\cos\alpha.$$

mais page 64, on a :

$$E_a\,\cos\alpha = RI+\Sigma\cos\theta$$

et même page :

$$\Sigma\cos\theta = r_1\,X_1\cos\varphi_1+k\lambda_1\,X_1\sin\varphi_1$$

en nous reportant à l'équation générale (page 27), nous aurons :

$$X_1\cos\varphi_1 = -\frac{AC+BD}{C^2+D^2} \qquad X_1\sin\varphi_1 = \frac{BC-AD}{C^2+D^2}$$

$$\Sigma \cos\theta = \frac{1}{C^2 + D^2} \left\{ k\lambda_1 BC - k\lambda_1 AD - r_1 AC - r_1 BD \right\}$$

En remplaçant A, B, C, D, par leur valeur (page 64), nous aurons :

$$\Sigma \cos\theta = \frac{I}{C^2 + D^2} \left\{ k^2\lambda_1 r_2 (\lambda_1 + \lambda_2) - k^2\lambda_1\lambda_2 (r_1 + r_2) + k^2\lambda_2 r_1 (\lambda_1 + \lambda_2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2) \right\}$$

$$\Sigma \cos\theta = \frac{I \left[k^2 (r_1\lambda_2^2 + r_2\lambda_1^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2) \right]}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2}$$

$$T_m = \frac{I^2}{2} \left\{ R + \frac{k^2 (r_1\lambda_2^2 + r_2\lambda_1^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right\}$$

Si le circuit dérivé ayant la résistance r_1, est le circuit utilisateur, le travail moyen dans ce circuit sera :

$$T_u = r_1 \frac{X_1^2}{2} = \frac{I^2}{2} \frac{r_1 (r_2^2 + k^2\lambda_2^2)}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \quad \text{(page 60)}$$

Le rendement sera :

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{r_1 (r_2^2 + k^2\lambda_2^2)}{R \left[(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \right] + k^2 (r_1\lambda_2^2 + r_2\lambda_1^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$$

Les équations générales établies ci-dessus peuvent servir à résoudre un certain nombre de problèmes, relatifs aux courants dérivés.

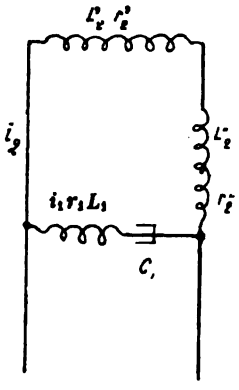


Fig. 13

Application au wattmètre. — Nous avons dit dans le chapitre précédent que, si on intercale dans le circuit à fil fin d'un wattmètre, un condensateur annulant l'effet de la s. i. de ce circuit, les indications de ce wattmètre sont rigoureusement proportionnelles à la puissance, électrique (pour un nombre donné de périodes à la seconde). Nous aurons (fig. 13) :

$$L_2' + L_2'' = L_2 = \lambda_2 \qquad r_2' + r_2'' = r_2$$

$$L_1 - \frac{1}{k^2 C_1} = \lambda_1$$

Pour annuler l'effet de la s. i., nous prendrons :

$$L_1 = \frac{1}{k^2 c_1} \qquad c\ a.d \qquad \lambda_1 = 0$$

Dans ce cas, nous aurons (voir page 61) :

$$\text{tg } \varphi_1 = - \frac{k r_1 \lambda_2}{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2^2}$$

L'angle de décalage de la f. e. m. agissant aux bornes du wattmètre sera donné par la relation (page 62) :

$$\text{tg } \theta = - \frac{k r_1^2 \lambda_2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2) + k^2 r_1 \lambda_2^2} = - \frac{k r_1 \lambda_2}{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2^2}$$

Nous aurons donc $\theta = \varphi_1$, le courant i_1 ne sera pas décalé par rapport à e, il est alors bien évident que les valeurs moyennes de ei_2 et de $i_1 i_2$ seront rigoureusement proportionnelles pour toutes les valeurs de r_2 et de λ_2 (tant que k restera constant).

M. Boucherot a démontré que, *si l'on place en série sur une différence de potentiel constante, une capacité et une self-induction (sans résistance), telles que* $k_2 Lc = 1$, *on peut recueillir dans un circuit placé indifféremment aux bornes de la capacité ou de la self-induction, un courant dont l'intensité efficace est constante et que l'on a :*

$$\frac{E_{eff.}}{kL} = k.c.\ E_{eff.}$$

L'intensité est constante quels que soient les appareils en circuit : résistances, bobines de s. i., condensateurs, moteurs, etc.

Désignons par i_1, L_1, c_1, r_1, les valeurs de l'intensité, de la s. i., de la capacité et de la résistance du circuit dérivé et faisons $\lambda_1 = L_1 - \frac{1}{k^2 c_1}$.

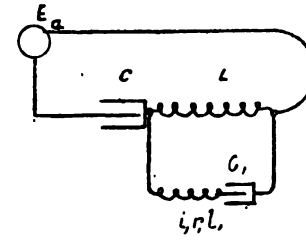


Fig. 14

Si le circuit est en dérivation sur la self-induction (fig. 14), nous aurons $\lambda_2 = L$, et pour le circuit principal, $- \frac{1}{k^2 C} = \lambda$, nous aurons donc puisque :

$$\frac{1}{k^2 C} = L \qquad \lambda = - \lambda_2.$$

Si le circuit est en dérivation sur la capacité (fig. 15), nous aurons :

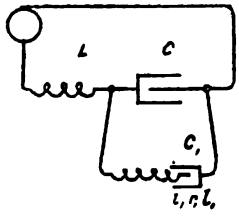


Fig. 15

$$\lambda_2 = -\frac{1}{k^2 C} \qquad \lambda = L$$

et comme :

$$\frac{1}{k^2 C} = L$$

nous aurons encore :

$$\lambda = -\lambda_2$$

c'est-à-dire qu'au moyen des formules générales trouvées au commencement de ce chapitre, nous pouvons résoudre simultanément les deux cas.

Les résistances de la capacité c et de la s. i. L étant nulles, nous aurons :

$$r_2 = 0 \qquad R = 0$$

Dans ces conditions, nous aurons (page 60) :

$$X_1^2 = \frac{k^2 \lambda_2^2}{r_1^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2.$$

(page 61) $$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{k r_1 \lambda_2}{k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} = -\frac{r_1}{k (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

L'équation de la page 65, devient :

$$\operatorname{tg} \alpha = -k. \frac{k^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) + r_1^2 \lambda_2 - \lambda_2 \{r_1^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2\}}{k^2 r_1 \lambda_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -k \frac{k^2 \lambda_1^2 \lambda_2 + k^2 \lambda_1 \lambda_2^2 - k^2 \lambda_1^2 \lambda_2 - k^2 \lambda_2^2 - 2 k^2 \lambda_1 \lambda_2^2}{k^2 r_1 \lambda_2^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k. (k^2 \lambda_2^2 + k^2 \lambda_1 \lambda_2^2)}{k^2 r_1 \lambda_2^2} = \frac{k (\lambda_1 + \lambda_2)}{r_1}$$

L'équation de la page 65 devient :

$$E_a^2 = I^2 \left\{ k^2 \lambda_2^2 + \frac{(r_1^2 + k^2 \lambda_1^2) k^2 \lambda_2^2 - 2 k^2 \lambda_2 [k^2 \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) + r_1^2 \lambda_2]}{r_1^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \right.$$

$$E_a^2 = \frac{k^2 r_1^2 \lambda_2^2 + k^4 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + k^4 \lambda_2^4 + 2\, k^4 \lambda_1 \lambda_2^3 + k^2 r_1^2 \lambda_2^2 + k^4 \lambda_1^2 \lambda_2^2}{r_1^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2 +$$

$$+ \frac{-2\, k^4 \lambda_1^2 \lambda_2^2 - 2\, k^4 \lambda_1 \lambda_2^3 - 2\, k^2 r_1^2 \lambda_2^2}{r_1^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2$$

$$E_{a1}^2 = \frac{k^4 \lambda_2^4}{r_1^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2 = k^2 \lambda_2^2 X_1^2 \quad \text{(voir page 68)}$$

La f. e. m. appliquée efficace est donnée par la relation :

$$(E_{a\,eff})^2 = E_a^2 \left\{ \sin^2 (kt - \alpha) \right\}_{moy} = \frac{E_a^2}{2} \quad \text{(page 20)}$$

L'intensité efficace dans le circuit utilisateur est :

$$(i_{1\,eff})^2 = X_1^2 \left\{ \sin^2 (kt - \varphi_1) \right\}_{moy} = \frac{X_1^2}{2}$$

Nous aurons donc :

$$(i_{1\,eff})^2 = \frac{E_a^2}{2\, k^2 \lambda_2^2} = \frac{(E_{a\,eff})^2}{k^2 \lambda_2^2}$$

mais on a :

$$\lambda_2 = L$$

ou :

$$\lambda_2 = + \frac{1}{k^2 c}$$

$$(i_{1\,eff})^2 = \frac{(E_{a\,eff})^2}{k^2 L^2} = (k^2 c^2 . E_{a\,eff.})^2$$

d'où :

$$i_{1\,eff} = \frac{E_{a\,eff}}{k L}\, kc. = E_{a\,eff.} \qquad c.q.f.d.$$

Nous avons en outre (voir page 68) :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 . \operatorname{tg} \alpha = -1$$

$$\varphi_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

L'intensité est donc toujours à 90° avec la f. e. m. appliquée.

M. Boucherot, après avoir démontré ce théorème, par une autre méthode que celle indiquée ci-dessus, ajoute :

« Nous avons vu, que l'intensité dans le circuit utilisateur est indépendante en grandeur et en phase, de tout facteur qui ne fait qu'opposer une force contre-électromotrice sinusoïdale ; en effet, nous venons de voir qu'elle est indépendante de la s. i. et de la capacité (1). Mais une force contre-électromotrice sinusoïdale quelconque, l'intensité étant de la forme $I_{max} \sin kt$, par exemple, peut être mise sous la forme $A \sin kt + B \cos kt$, B étant positif ou négatif. Cette force contre-électromotrice équivaut donc à la différence de potentiel qu'absorberait une résistance $\frac{A}{I_{max}}$, plus la force contre-électromotrice qu'opposerait une self-induction $L = \frac{1}{k} \cdot \frac{B}{I_{max}}$, si B est positif ou une capacité, $c = \frac{1}{\frac{-B}{kI_{max}}}$, si B est négatif. Tout se passe donc comme si l'on avait en circuit, à la place de l'appareil opposant une telle force contre-électromotrice, une résistance ordinaire, en série avec bobine inductive, ou un condensateur. L'intensité ne sera donc nullement influencée par cette force contre-électromotrice. Or, l'induction dans un circuit alternatif, d'un moteur ou d'un transformateur, ne fait qu'opposer une force contre-électromotrice sinusoïdale. On pourra donc disposer, dans le circuit utilisateur de notre montage, non seulement des résistances, des bobines inductives et des condensateurs, mais encore des moteurs et des transformateurs, sans que l'intensité soit changée en grandeur et en phase, si l'on a soin de laisser la différence de potentiel aux bornes de ce montage, constante en grandeur et en phase. »

M. Boucherot démontre ensuite qu'inversement, *si l'on place en dérivation sur un circuit dont l'intensité efficace est maintenue constante, une bobine de s. i. et un condensateur, liés entre eux par la relation* $k^2 Lc = 1$, *on peut obtenir, dans l'un ou l'autre des circuits,*

(1) Car i_1 eff. $= \frac{E_a \text{ eff.}}{kL} = \frac{\text{constante}}{kL}$, c'est-à-dire indépendante de λ_1 et de r_1, c'est-à-dire de la s. i. de la capacité et de la résistance du circuit utilisateur.

une différence de potentiel efficace constante, quelle que soit la composition du circuit qu'elle alimente.

Examinons le cas de la figure 16, on a :

$$\lambda_1' = L_1' - \frac{1}{k^2 c_1'}$$

L' et c_1', représentant la s. i. et la capacité du circuit AB, nous aurons :

$$\lambda_1 = \lambda_1' - \frac{1}{k^2 c}$$

$$\lambda_2 = L$$

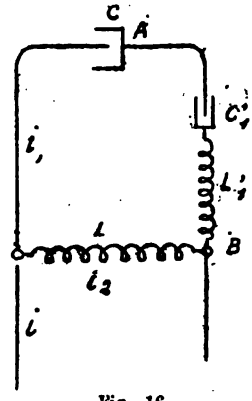


Fig. 16

et puisque :

$$L = \frac{1}{k^2 c}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1'$$

de plus, dans les équations, nous aurons :

$$r_2 = 0$$

La f. e. m., agissant en D, est :

$$e = \Sigma \sin (kt - \theta)$$

La f. e. m., agissant en A (si la résistance entre D et A est nulle), sera :

$$e' = e - V = \Sigma \sin (kt - \theta) - V$$

Mais

$$dV = \frac{i_1}{c} dt = \frac{X_1}{c} \sin (kt - \varphi_1) dt$$

$$V = -\frac{X_1}{k.c} \cos (kt - \varphi_1)$$

$$e' = \Sigma \sin (kt - \theta) + \frac{X_1}{kc} \cos (kt - \varphi_1)$$

L'in

M. I

méth

« N

pen

pos

ven

Mai

sit

la

co

q

t

ou

si

for

bo

le

d

fa

d

On a, page 62 :

$$\Sigma^2 = X_1^2 (r_1^2 + k^2 \lambda_1^2)$$

$$(e'_{eff})^2 = X_1^2 \left\{ \frac{r_1^2 + k^2 \lambda_1^2}{2} + \frac{1}{2 k^2 c^2} + \frac{\lambda_1}{c} \right\}$$

$$\lambda_1 = \lambda_1' - \frac{1}{k^2 c}$$

$$(e'_{eff})^2 = X_1^2 \left\{ \frac{r_1^2}{2} + \frac{k^2 \lambda_1'^2}{2} + \frac{k^2}{2 k^4 c^2} - \frac{k^2 \lambda_1'}{k^2 c} + \frac{1}{2 k^2 c^2} + \frac{\lambda_1'}{c} - \frac{1}{k^2 c^2} \right\}$$

$$(e'_{eff})^2 = X_1^2 \frac{r_1^2 + k^2 \lambda_1'^2}{2}$$

$$X_1^2 = \frac{k^2 \lambda_2^2}{r_1^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2 = \frac{k^2 L^2}{r_1^2 + k^2 \lambda_1'^2} I^2 \text{ (page 60)}$$

$$(e'_{eff})^2 = \frac{k^2 L_2}{2} I^2$$

Le carré de l'intensité efficace est $(i_{eff})^2 = \frac{I^2}{2}$; si celle-ci est constante, on a :

$$(e'_{eff})^2 = k^2 L^2 (i_{eff})^2 = \text{constante} \quad c.q.f.d.$$

Dans le cas de la figure 17, on a :

$$\lambda_2 = -\frac{1}{k^2 c} \qquad \lambda_1 = L + \lambda_1' \qquad \lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_1'$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1' \qquad r_2 = 0$$

La f. e. m., agissant en D, est :

$$e = \Sigma \sin (kt - \theta)$$

La f. e. m., agissant en A (si la résistance entre D et A est nulle), sera :

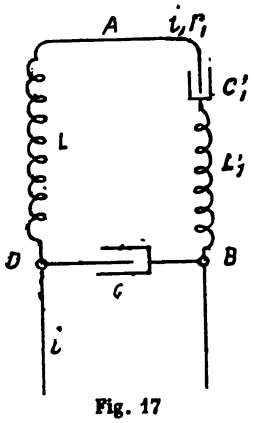


Fig. 17

$$e' = e - L \frac{di_1}{dt} = \Sigma \sin (kt - \theta) - kL X_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

La f.e m. efficace, agissant en A, nous sera donnée par la relation :

$$(e'_{eff})^2 = \left\{\left(\Sigma \sin\,(kt-\theta) + \frac{X_i}{kc}\cos\,(kt-\varphi_i)\right)^2\right\}_{moyenne}$$

$$(e'_{eff})^2 = \left|\Sigma^2 \sin^2(kt-\theta) + \frac{X_i^2}{k^2c^2}\cos^2(kt-\varphi_i) + \frac{2\Sigma X_i}{kc}\sin(kt-\theta)\cos(kt-\varphi_i)\right|_{moy}$$

La valeur moyenne de $\sin^2(kt-\theta)$ est $\frac{1}{2}$, celle de $\cos^2(kt-\varphi_i)$ est également $\frac{1}{2}$ (page 20), il nous reste à trouver la valeur moyenne de :

$$\sin\,(kt-\theta)\cos\,(kt-\varphi_i)$$

qui est évidemment la même que celle de $\sin kt \cos\left\{kt-(\varphi_i-\theta)\right\}$ or, la valeur moyenne de $\sin kt \cos\,(kt-\alpha)$ est égale à :

$$\frac{\sin\alpha}{2} \quad \text{(page 20)}$$

La valeur moyenne de $\sin kt \cos\left\{kt-(\varphi_i-\theta)\right\}$ sera :

$$\frac{\sin\,(\varphi_i-\theta)}{2}$$

Cherchons la valeur de :

$$\Sigma.\, X_i \sin\,(\varphi_i-\theta) = X_i \sin\varphi_i\, \Sigma\cos\theta - X_i\cos\varphi_i\, \Sigma.\sin\theta$$

Or, page 64, on a :

$$\Sigma\cos\theta = r_i X_i \cos\varphi_i + k\lambda_i X_i \sin\varphi_i$$

$$\Sigma\sin\theta = r_i X_i \sin\varphi_i - k\lambda_i x_i \cos\varphi_i$$

$$\Sigma X_i \sin\,(\varphi_i-\theta) = r_i X_i^2 \sin\varphi_i\cos\varphi_i + k\lambda_i X_i^2 \sin^2\varphi_i - r_i X_i^2 \sin\varphi_i\cos\varphi_i + k\lambda_i X_i^2\cos^2\varphi_i$$

$$= k\lambda_i X_i^2\,(\sin^2\varphi_i + \cos^2\varphi_i) = k\lambda_i X_i^2$$

On aura donc :

$$(e'_{eff})^2 = \frac{\Sigma^2}{2} + \frac{X_i^2}{2k^2c^2} + \frac{k\lambda_i X_i^2}{kc}$$

On a, page 62 :

$$\Sigma^2 = X_1^2 (r_1^2 + k^2 \lambda_1^2)$$

$$(e'_{eff})^2 = X_1^2 \left\{ \frac{r_1^2 + k^2 \lambda_1^2}{2} + \frac{1}{2 k^2 c^2} + \frac{\lambda_1}{c} \right\}$$

$$\lambda_1 = \lambda_1' - \frac{1}{k^2 c}$$

$$(e'_{eff})^2 = X_1^2 \left\{ \frac{r_1^2}{2} + \frac{k^2 \lambda_1'^2}{2} + \frac{k^2}{2 k^4 c^2} - \frac{k^2 \lambda_1'}{k^2 c} + \frac{1}{2 k^2 c^2} + \frac{\lambda_1'}{c} - \frac{1}{k^2 c^2} \right\}$$

$$(e'_{eff})^2 = X_1^2 \frac{r_1^2 + k^2 \lambda_1'^2}{2}$$

$$X_1^2 = \frac{k^2 \lambda_2^2}{r_1^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2 = \frac{k^2 L^2}{r_1^2 + k^2 \lambda_1'^2} I^2 \text{ (page 60)}$$

$$(e'_{eff})^2 = \frac{k^2 L_2}{2} I^2$$

Le carré de l'intensité efficace est $(i_{eff})^2 = \frac{I^2}{2}$; si celle-ci est constante, on a :

$$(e'_{eff})^2 = k^2 L^2 (i_{eff})^2 = \text{constante} \quad c.q.f.d.$$

Dans le cas de la figure 17, on a :

$$\lambda_2 = -\frac{1}{k^2 c} \qquad \lambda_1 = L + \lambda_1' \qquad \lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_1'$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1' \qquad r_2 = 0$$

La f. e. m., agissant en D, est :

$$e = \Sigma \sin (kt - \theta)$$

La f. e. m., agissant en A (si la résistance entre D et A est nulle), sera :

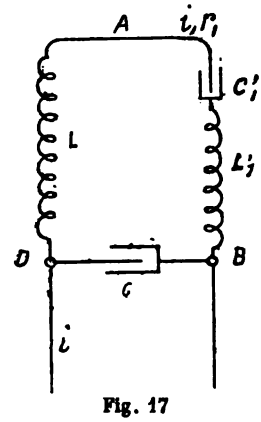


Fig. 17

$$e' = e - L. \frac{di}{dt} = \Sigma \sin (kt - \theta) - kL X_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

On aura donc :

$$(e'_{eff}) = \left\{\left(\Sigma \sin(kt - \theta) - kL X_i \cos(kt - \varphi_i)\right)^2\right\}_{moy}$$

$$(e'_{eff})^2 = \left\{\Sigma^2 \sin^2(kt-\theta) + k^2L^2X_i^2\cos^2(kt-\varphi_i) - 2kL\Sigma X_i \sin(kt-\theta)\cos(kt-\varphi_i)\right\}_{moy}$$

$$(e'_{eff})^2 = \frac{\Sigma^2}{2} + \frac{k^2L^2X_i^2}{2} - kL\Sigma X_i\left(\sin(kt-\theta)\cos(kt-\varphi_i)\right)_{moy}$$

$$(e'_{eff})^2 = \frac{\Sigma^2}{2} + \frac{k^2L^2X_i}{2} - kL\Sigma X_i \sin(\varphi_i - \theta) \qquad \text{(Page 72)}$$

Mais, d'après ce qui précède :

$$\Sigma_i X_i \sin(\varphi_i - \theta) = k\lambda_i X_i^2$$

$$(e'_{eff})^2 = \frac{\Sigma^2}{2} + \frac{k^2L^2X_i^2}{2} - k^2L\lambda_i X_i^2$$

Mais :

$$\Sigma^2 = X_i^2(r_i^2 + k^2\lambda_i^2) \quad \text{(page 62)}$$

$$(e'_{eff})^2 = X_i^2\left\{\frac{r_i^2 + k^2\lambda_i^2}{2} + \frac{k^2L^2}{2} - k^2L\lambda_i\right\}$$

$$\lambda_i = L + \lambda_i'$$

$$(e'_{eff})^2 = X_i^2\left\{\frac{r_i^2}{2} + \frac{k^2L^2}{2} + \frac{k^2\lambda_i'^2}{2} + k^2L\lambda_i' + \frac{k^2L^2}{2} - k^2L^2 - k^2\lambda L\lambda_i'\right\}$$

$$(e'_{eff})^2 = X_i^2\frac{r_i^2 + k^2\lambda_i'^2}{2}$$

On a page 60 :

$$X_i^2 = \frac{k^2\lambda_2^2}{r_i^2 + k^2(\lambda_i + \lambda_2)^2}I^2 = \frac{k^2\dfrac{1}{k^4c^2}}{r_i^2 + k^2\lambda_i'^2}I^2 = \frac{k^2L^2}{r_i^2 + k^2\lambda_i'^2}I^2$$

$$(e'_{eff})^2 = \frac{k^2L^2}{2}I^2 = k^2L^2(i_{eff})^2$$

Comme i_{eff} est constant, ainsi que L, on a :

$$e'_{eff} = \text{constante} \qquad c.q.f.d.$$

M. Boucherot donne ensuite les détails suivants, sur les expériences qu'il a faites :

« Une différence de potentiel efficace de 800 volts, sur laquelle nous avons placé un condensateur de 0,75 microfarad, et une bobine inductive de 5 quadrants, nous a donné, dans une première expérience, une intensité efficace de 1/3 ampère, entre 100 et 1.000 volts utiles dans le circuit utilisateur, dans lequel on introduisait des résistances et des bobines de s. i. Le k de la machine était égal à 500 environ. Avec 1.200 volts et les mêmes appareils, l'intensité était de $\frac{1}{2}$ ampère. »

M. Boucherot a basé sur ces phénomènes un système de distribution du courant alternatif, que nous étudierons.

On peut également démontrer le théorème suivant :

Si, dans un réseau composé de 3 conducteurs pouvant avoir de la s. i. *et dans lesquels peuvent être intercalés des condensateurs, une* f. e. m., *périodique simple, appliquée à l'un des conducteurs, produit dans un autre conducteur un courant d'intensité efficace* i_{eff}, *réciproquement, la même* f. e. m. *extérieure appliquée à ce dernier conducteur, produit dans le premier un courant d'intensité efficace* i_{eff}.

Soient A, B, C,, les 3 conducteurs pour lesquels nous avons respectivement les constantes :

pour A :

$$L, r, c. \qquad \lambda = L - \frac{1}{k^2 c}$$

pour B :

$$L_1, r_1, c_1. \qquad \lambda_1 = L_1 - \frac{1}{k^2 c_1}$$

pour C :

$$L_2, r_2, c_2. \qquad \lambda_2 = L_2 - \frac{1}{k^2 c_2}$$

Si la f. e. m. extérieure, de valeur instantanée, $e_a = E_a \sin(kt - \alpha)$, agit dans le conducteur A, nous aurons dans le conducteur B un courant :

$$i_1 = X_1 \sin(kt - \varphi_1)$$

dont le carré de l'intensité efficace sera :

$$(i_{eff})^2 = \frac{X_1^2}{2}$$

Or, nous avons trouvé :

$$X_1^2 = \frac{r_2^2 + k^2\lambda_2^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2 \quad \text{(page 60}$$

$$E_a^2 = \frac{B}{(r_1 + r_2)^2 + k_2(\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2 \quad \text{(page 65)}$$

d'où :

$$X_1^2 = \frac{(r_2^2 + k^2\lambda_2^2)}{B} E_o^2$$

Or, en développant B, on peut le mettre sous la forme suivante, en remplaçant dans l'équation de la page 65, R par r :

$$B = k^2(r_1^2\lambda^2 + r^2\lambda_1^2)(1 + 2k_2) + k^2(\lambda^2 + \lambda_1^2)(r_2^2 + k^2\lambda_2^2)$$

$$+ k^2(r_1\lambda^2 + r\lambda_1^2) + (r^2 + r_1^2)(r_2^2 + k^2\lambda_2^2) 2k^2\lambda_2$$

$$(\lambda_1\lambda^2 + \lambda_1^2\lambda) + 2r_2(r^2r_1 + rr_1^2) + r_1^2r^2 + k^4\lambda^2\lambda_1^2$$

$$+ 2(k^2\lambda\lambda_1 + rr_1)(r_2^2 + k^2\lambda_2^2) + 2k^2\lambda\lambda_1 r_2^2$$

Si, maintenant, nous supposons que la f. e. m. $E^a \sin(kt - \alpha)$ agit dans le conducteur B, il suffira, pour trouver l'intensité efficace du courant circulant dans le conducteur A, de remplacer dans les équations précédentes r par r_1, λ par λ_1 et réciproquement.

On arrivera à la même valeur pour X_1^2, car le numérateur est indépendant de r, r_1, λ, λ_1, et le dénominateur est symétrique en r et r_1 et en λ et λ_1.

Les deux intensités efficaces auront donc bien la même valeur.

Ce théorème pourrait du reste s'étendre, comme dans le cas du courant continu, à un réseau composé d'un nombre quelconque de conducteurs.

Un cas spécial important de la dérivation, est *le cas où l'un des deux circuits dérivés est dépourvu de résistance*, soit $r_2 = o$.

Nous aurons alors, si $i = I \sin kt$ est la valeur instantanée du courant dans la branche principale :

$$X_1^2 = \frac{k^2\lambda_2^2}{r_1^2 + k^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2 \quad \text{(page 60)}$$

$$X_2^2 = \frac{r_1^2 + k^2\lambda_1^2}{r_1^2 + k^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2} I^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -k \frac{r_1 \lambda_2}{k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)} = -\frac{r_1}{k(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = k \frac{r_1 \lambda_2}{r_1^2 + k^2 \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Nous verrons plus loin des applications importantes de ce cas.

Si l'on a à traiter le cas *de plusieurs branchements, dérivés du même point d'un circuit principal,* la manière la plus simple de résoudre le problème est de prendre comme inconnue la valeur instantanée de la différence du potentiel aux bornes du branchement, ainsi que nous l'avons fait.

On pourra alors considérer chaque branchement comme un circuit isolé auquel est appliquée une f. e. m. extérieure qui est la différence de potentiel aux bornes.

On obtient ainsi n équation permettant de déterminer la valeur instantanée (valeur maximum et angle de décalage) de l'intensité du courant dans chaque circuit, en fonction de la différence de potentiel aux bornes de la dérivation.

On obtiendra ensuite une nouvelle équation, permettant de déterminer la valeur instantanée de la différence de potentiel aux bornes de la dérivation (valeur maximum et angle de décalage) en remarquant que la somme des valeurs instantanées des intensités des courants, circulant dans les branchements, est égale à la valeur instantanée de l'intensité du courant circulant dans le circuit principal.

§ 9. — CONDENSATEUR TRANSFORMATEUR.

Si l'on joint deux points d'un circuit, aux plaques d'un condensateur, les intensités du courant dans chacune des deux sections de ce

circuit seront différentes (fig. 18). On a ainsi un condensateur jouan le rôle de transformateur, le courant, dans la partie la plus éloignée

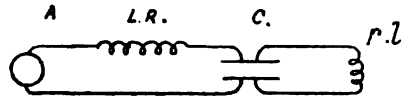


Fig. 18

de la source d'électricité A, étant dû à la différence de potentiel des plaques du condensateur.

Nous pouvons appliquer, à ce cas, les formules générales de la page 60, en considérant la partie du circuit à partir du condensateur comme une première dérivation et le condensateur lui-même comme une deuxième derivation de résistance nulle,

Nous aurons donc :

$$r_1 = r \qquad \lambda_1 = l$$

$$r_2 = o \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{k^2 c}$$

La valeur instantanée de l'intensité du courant dans la partie du circuit où est placée la source d'électricité, étant :

$$i = \mathrm{I} \sin kt$$

celle dans la partie la plus éloignée sera :

$$i_1 = \mathrm{X}_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

Or, on a, page 60 :

$$\mathrm{X}_1^2 = \frac{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2} \mathrm{I}^2$$

$$\mathrm{X}_1^2 = \frac{\frac{k^2}{k^4 c^4}}{r^2 + k^2 \left(l - \frac{1}{k^2 c}\right)^2} = \frac{\mathrm{I}^2}{k^4 c^2 r^2 + (k^2 cl - 1)^2}$$

Le rapport des carrés des intensités efficaces, sera :

$$\frac{\mathrm{I}^2}{\mathrm{X}_1^2} = k^4 c^2 r^2 + (k^2 cl - 1)^2$$

Suivant que le second membre sera plus petit ou plus grand que 1, l'intensité efficace dans la partie éloignée du circuit, sera plus grande ou plus petite que l'intensité efficace dans la partie où agit la source. Si la portion éloignée n'a pas de s. i., c'est-à-dire si $l = o$, l'intensité efficace dans cette partie, sera toujours plus petite que l'intensité efficace dans la portion où agit la source extérieure.

Si :

$$k^2c^2r^2 + (k^2cl - 1)^2 = 1$$

on aura :

$$c = \frac{2l}{r^2 + k^2l^2}$$

et les intensités efficaces seront égales.

Prenons la dérivée de $\frac{I^2}{X_1^2}$ par rapport à c, nous aurons :

$$2k^2cr^2 + 2(k^2cl - 1)k^2l = o$$

$$c = \frac{l}{k^2l^2 + r^2}$$

Dans ce cas, le rapport $\frac{I^2}{X_1^2}$ sera minimum (la dérivée seconde étant positive) et $\frac{X_1^2}{I^2}$ sera maximum, on aura :

$$X_1^2 = I^2\left(1 + \frac{k^2l^2}{r^2}\right)$$

l'intensité efficace du courant circulant dans la portion éloignée du circuit sera plus grande que celle du courant circulant dans la portion où agit la source extérieure, et le rapport sera d'autant plus grand que le nombre de périodes à la seconde et la constante de temps de la partie la plus éloignée du circuit, seront plus grands. Ainsi, par exemple, pour $k = 1.000$ (environ 160 fréquences à la seconde) $l = 0{,}02$ quadrant, $r = 4$ ohms, on aura :

$$c = \frac{0.02}{16 + (1000)^2 \times (0.02)^2} = 0{,}000048 \text{ farad.}$$

soit 48 microfarads.

Nous aurons :

$$X_1^2 = I^2 \left(1 + \frac{(1000)^2 (0.02)^2}{16}\right)$$

$$X_1^2 = 26\, I^2$$

$$X_1 = 5{,}10\, I$$

L'intensité efficace sera 5,10 fois plus grande dans la portion la plus éloignée du circuit, que dans la section où agit la source extérieure.

Nous avons vu (page 66), que si le circuit dérivé de résistance r_1 est celui dans lequel le travail est utilisé, le rendement a pour expression :

$$R^t = \frac{T_u}{T_m} = \frac{r_1 (r_2^2 + k^2 \lambda_2^2)}{R \left\{ (r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \right\} + k^2 (r_1 \lambda_2^2 + r_2 \lambda_1^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$$

dans le cas du condensateur transformateur, nous avons :

$$r_1 = r \qquad \lambda_1 = l \qquad r_2 = o \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{k^2 c}$$

nous aurons donc :

$$R^t = \frac{r . k^2 \frac{1}{k^4 c^2}}{R \left\{ r^2 + k^2 \left(l - \frac{1}{k^2 c} \right)^2 \right\} + k^2 r . \frac{1}{k^4 c^2}}$$

$$R^t = \frac{r}{R . r^2 k^2 c^2 + R (k^2 c l - 1)^2 + r}$$

$$R^t = \frac{1}{1 + \frac{R}{r} (k^2 c l - 1)^2 + R r . k^2 c^2}$$

Le rendement sera maximum, quand le dénominateur sera minimum.

Prenons la dérivée par rapport à c et égalons-la à zéro, nous aurons :

$$2k^2 l.\frac{R}{r}(k^2 cl-1)+2k^2 R r c = o$$

$$l(k^2 cl^2-1)+r^2 c = o$$

$$c(k^2 l^2+r^2) = l.$$

$$c = \frac{l}{r^2+k^2 l^2}$$

Le maximum de rendement correspond donc au maximum du rapport :

$$\frac{X_1^2}{I^2}$$

Et dans ce cas, on a :

$$R^1 = \frac{r^2+k^2 l^2}{r^2+k^2 l^2+Rr} = 1-\frac{Rr}{r^2+k^2 l^2+Rr}$$

Il est également intéressant de comparer la valeur maximum de f. e. m. de la source, E_a, avec la différence de potentiel maximum agissant aux bornes du condensateur, Σ.

En faisant :

$$r_1 = r \qquad r_2 = o$$

$$\lambda_1 = l \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{k^2 c} \qquad \lambda = L$$

dans l'équation de la page 65, nous aurons :

$$E_a^2 = I^2\left\{k^2L^2+R^2+\frac{(r^2+k^2l^2)k^2\frac{1}{k^4c^2}+2k^2L\left\{-\frac{l}{c}\left(l-\frac{1}{k^2c}\right)-\frac{r^2}{k^2c}\right\}+2Rr\frac{1}{k^2c^2}}{r^2+k^2\left(l-\frac{1}{k^2c}\right)^2}\right\}$$

$$E_a^2 = I^2\frac{(k^2L^2+R^2)\left\{r^2+k^2\left(l-\frac{1}{k^2c}\right)^2\right\}+(r^2+k^2l^2)\frac{1}{k^2c^2}-2k^2L\left\{\frac{l}{c}\left(l-\frac{1}{k^2c}\right)+\frac{r^2}{k^2c}\right\}+\frac{2Rr}{k^2c^2}}{r^2+k^2\left(l-\frac{1}{k^2c}\right)^2}$$

l'équation de la page 62 nous donne :

$$\Sigma^2 = \frac{(r^2+k^2l^2)k^2\frac{1}{k^4c^2}}{r^2+k^2\left(l-\frac{1}{k^2c}\right)^2}I^2$$

Nous aurons donc :

$$\frac{E_a^2}{\Sigma^2} = \frac{(k^2L^2 + R^2)\left\{r^2 + kl^2 + \frac{1}{k^2c^2} - \frac{2l}{c}\right\} + (r^2 + k^2l^2)\frac{1}{k^2c^2} - 2k^2L\left\{\frac{l^2}{c} - \frac{l}{k^2c^2} + \frac{r^2}{k^2c}\right\} + \frac{2Rr}{k^2c^2}}{(r^2 + k^2l^2)\frac{1}{k^2c^2}}$$

$$\frac{E_a^2}{\Sigma^2} = (R^2 + k^2L^2)\,k^2c^2 + 1 - 2k^2Lc + \frac{(R^2 + k^2L^2)(1 - 2k^2cl) + 2k^2Ll + 2Rr}{r^2 + k^2l^2}$$

$$\frac{E_a^2}{\Sigma^2} = k^2c^2R^2 + k^4c^2L^2 - 2k^2Lc + 1 + \frac{(R^2 + k^2L^2)(1 - 2k^2cl) + 2k^2Ll + 2Rr}{r^2 + k^2l^2}$$

$$\frac{E_a^2}{\Sigma^2} = (1 - k^2cL)^2 + k^2c^2R^2 + \frac{(R^2 + k^2L^2)(1 - 2k^2cl) + 2k^2Ll + 2Rr}{r^2 + k^2l^2}$$

On peut, au moyen de cette équation, déterminer Σ quand E_a est donné. Si un un condensateur de capacité c_1 était intercalé dans le circuit principal, il faudrait remplacer dans l'équation L par $\lambda = L - \frac{1}{k^2 c_1}$.

Quand r est infini, on doit retomber sur le cas d'un circuit dans lequel est intercalé un condensateur, on a alors :

$$\frac{E_a^2}{\Sigma^2} = (1 - k^2cL)^2 + k^2c^2R^2$$

$$\Sigma = \frac{E_a}{\sqrt{(1 - k^2cL)^2 + k^2c^2R^2}}$$

c'est bien la formule que nous avons trouvée page 46, pour la valeur maximum de la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur intercalé dans un circuit de résistance R.

§ 10. — INDUCTION MUTUELLE

Supposons que deux circuits soient placés dans un milieu magnétique de perméabilité constante et qu'une f. e. m. périodique simple agisse dans l'un d'eux, que nous nommerons *circuit primaire*, l'autre étant le *secondaire*.

Le circuit primaire sera parcouru par un courant alternatif, ce qui fera varier à chaque instant le flux de force embrassé par le circuit

secondaire, de sorte que ce circuit sera soumis à l'action d'une f. e. m. alternative et qu'il sera parcouru par un courant alternatif.

Le courant secondaire réagira sur le champ et par suite, sur le courant primaire. Si, en outre, les circuits ont de la s. i., on voit que le courant dans le circuit primaire sera dû à une f. e. m., qui sera la résultante de la f. e. m. appliquée, de la f. e. m. de s. i. et de la f. e. m. due à la réaction du courant du circuit secondaire sur le champ magnétique. Le circuit secondaire sera parcouru par un courant dû à une f. e. m. qui sera la résultante de la f. e. m. due à l'induction du courant primaire et de la f. e. m. due à la s. i.

Supposons les deux circuits dépourvus de s. i. et désignons par i_1, i_2 les valeurs instantanées des intensités des courants qui y circulent, r_1, r_2 les résistances de ces circuits, et par $e_a = E_a \sin kt$, la valeur instantanée de la f. e. m. appliquée au circuit primaire. Désignons, en outre, par M le coefficient d'induction mutuelle des deux circuits, c'est-à-dire le flux de force embrassé par l'un des circuits, lorsque l'autre est parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité.

Puisque nous avons admis que la perméabilité magnétique du champ est constante, le flux embrassé à chaque instant par le circuit primaire sera égal à Mi_2, de sorte que la f. e. m. due à la réaction du courant parcourant le circuit secondaire sera :

$$-\frac{(dMi_2)}{dt} = -M.\frac{di_2}{dt}$$

En appliquant la loi de Ohm, nous aurons :

$$r_1 i_1 = E_a \sin kt - M\frac{di_2}{dt}$$

On aura, pour les mêmes raisons, dans le circuit secondaire :

$$r_2 i_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$

car la f. e. m. due à la réaction du courant parcourant le circuit primaire est la seule f. e. m. agissant dans ce circuit, on aura donc :

$$i_2 = -\frac{M}{r_2}.\frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{r_2}\cdot\frac{d^2i_1}{dt^2}$$

$$r_1 i_1 = E_a \sin kt + \frac{M^2}{r_2}\frac{d^2i_1}{dt^2}$$

$$-\frac{M^2}{r_2}\cdot\frac{d^2i_1}{dt^2} - r_1 i_1 + E_a \sin kt = o$$

Equation différentielle, dont la solution générale est de la forme :

$$i_1 = Ae^{mt} + B \sin kt + C \cos kt$$

Le terme exponentiel diminue très vite à mesure que t augmente, de sorte que quand le régime permanent est établi, on a :

$$i_1 = B \sin kt + C \cos kt = B \sin kt + C \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right)$$

i_1 est donc la résultante des deux fonctions périodiques simples de même phase, il sera donc représenté par une fonction périodique de la forme D sin $(kt - \varphi)$, Comme $r_2 i_2 = -M\frac{di_1}{dt}$, i_2 sera également une fonction périodique de même phase (page 14).

Nous avons démontré, que la s. i. et la capacité n'influent pas sur la phase des courants alternatifs simples.

Nous pouvons donc dire que, lorsque le régime permanent est établi, les deux circuits sont parcourus, dans tous les cas par des courants alternatifs simples dont la phase est la même que celle de la f. e. m. extérieure appliquée au circuit primaire.

Nous pourrons donc employer, pour la résolution des problèmes, une méthode analogue à celle que nous avons appliquée dans le cas des circuits ayant de la s. i. et de la capacité.

Reprenons le cas des circuits dépourvus de s. i., prenons $i_1 = I \sin kt$ et cherchons la valeur de i_2, nous aurons :

$$i_2 = -\frac{M}{r_2}\cos kt$$

mais

$$\cos kt = -\sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right)$$

nous aurons donc :

$$i_2 = \frac{kM}{r_2} \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right)$$

Le courant parcourant le circuit secondaire est donc décalé de 90° en arrière du courant parcourant le circuit primaire.

Nous pouvons maintenant résoudre le cas général.

Soient r_1 et L_1, la résistance et le coefficient de s. i. du circuit primaire, c_1 la capacité d'un transformateur intercalé dans ce circuit, r_2, L_2, c_2, les quantités correspondantes du circuit secondaire.

Désignons par :

$$e_a = E_a \sin(kt - \theta)$$

la valeur instantanée de la f. e. m. extérieure appliquée au circuit primaire ;

Par :

$$i_1 = I_1 \sin kt$$

la valeur instantanée du courant circulant dans ce circuit.

Par :

$$i_2 = X_2 \sin(kt - \varphi_2)$$

la valeur instantanée de l'intensité du courant, dans le circuit secondaire.

Nous avons donc cinq quantités E_a, I_1, X_2, θ et φ_2; étant donnée l'une d'elles, on doit pouvoir trouver les quatre autres.

En appliquant la loi de Ohm, au circuit primaire, dans lequel agissent : 1° la f.e.m. appliquée e_a, 2° la f.e.m. due à la s.i., qui est $-L_1 \frac{di_1}{dt}$, 3° la f. e. m. due à la capacité $-V_1$, pour laquelle on a $\frac{dV_1}{dt} = \frac{i_1}{c}$, et 4° la f. e. m. due à la réaction du circuit secondaire, qui est $-M \frac{di_2}{dt}$, on aura :

$$(1) \qquad E_a \sin(kt - \theta) - L_1 \frac{di_1}{dt} - V_1 - M \frac{di_2}{dt} - r_1 i_1 = 0$$

Dans le circuit secondaire agissent les f. e. m. :

$$- M\frac{di_1}{dt}, \quad - L_2\frac{di_2}{dt}, \quad - V_2$$

on aura donc :

$$- M\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt} - V_2 - r_2 i_2 = o$$

(2) $$M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + V_2 + r_2 i_2 = o$$

Prenons les dérivées de ces équations par rapport au temps, nous aurons :

Pour l'équation 1 :

$$k\,E_a \cos(kt - \theta) - L_1\frac{d^2i_1}{dt^2} - \frac{dV_1}{dt} - M\frac{d^2i_2}{dt^2} - r_1\frac{di_1}{dt} = o.$$

Pour l'équation 2 :

$$M\frac{d^2i_1}{dt^2} + L_2\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{dV_2}{dt} + r_2\frac{di_2}{dt} = o.$$

$$i_1 = I_1 \sin kt \qquad \frac{di_1}{dt} = kI_1 \cos kt$$

$$\frac{d^2i_1}{dt^2} = - k^2 I_1 \sin kt$$

Posons :

$$i_2 = X_2 \sin(kt - \varphi_2)$$

$$\frac{di_2}{dt} = kX_2 \cos(kt - \varphi_2) \qquad \frac{d^2i_2}{dt^2} = - k^2 X_2 \sin(kt - \varphi_2)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{i_1}{c_1} = \frac{I_1 \sin kt}{c_1} \qquad \frac{dV_2}{dt} = \frac{i_2}{c_2} = \frac{X_2 \sin(kt - \varphi_2)}{c_2}$$

Les équations deviendront alors :

$$k\,E_a \cos(kt - \theta) + k^2 L_1 I_1 \sin kt - \frac{I_1}{c_1}\sin kt - kr_1 I_1 \cos kt + k^2 MX_2 \sin(kt - \varphi_2) = o$$

$$k\,E_a \cos(kt - \theta) + k^2\left(L_1 - \frac{1}{k^2 c_1}\right)\sin kt - kr_1 I_1 \cos kt + k^2 MX_2 \sin(kt - \varphi_2) = o$$

En posant :

$$L_1 - \frac{1}{k^2 c_1} = \lambda_1$$

nous aurons :

(3) $E_a \cos(kt - \theta) + k\lambda_1 I_1 \sin kt - r_1 I_1 \cos kt + k M X_2 \sin(kt - \varphi_2) = o$

$$- k^2 M L_1 \sin kt - k^2 L_2 X_2 \sin(kt - \varphi_2) + \frac{X_2}{c_2} \sin(kt - \varphi_2) + k r_2 X_2 \cos(kt - \varphi_2) = o$$

en posant :

$$L_2 - \frac{1}{k^2 c_2} = \lambda_2$$

nous aurons :

(4) $$- k M I_1 \sin kt - k\lambda_2 X_2 \sin(kt - \varphi_2) + r_2 X_2 \cos(kt - \varphi_2) = o$$

En nous reportant à l'équation générale (page 27), l'équation 4, nous donne :

$$A = - k M I_1 \qquad C = - k\lambda_2$$

$$B = 0 \qquad D = r_2$$

(5) $$X_2^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{k^2 M^2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} I_1^2$$

(6) $$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{AD - BC}{AC + BD} = \frac{AD}{AC} = \frac{D}{C} = - \frac{r_2}{k\lambda_2}$$

Nous aurons donc :

$$i_2 = I_1 \frac{k M}{\sqrt{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2}} \sin(kt - \varphi_2)$$

Dans le cas où $\lambda_2 = o$, c'est-à-dire quand $L_2 = \frac{1}{k^2 c_2}$, ou bien quand le circuit secondaire est dépourvu de s. i. et de capacité (voir page 85), on a :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\infty, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Le courant dans le circuit secondaire est décalé de 90° en arrière du courant du circuit primaire.

En faisant successivement $kt = \frac{\pi}{2}$ et $kt = o$ dans l'équation 3, nous aurons :

$$E_o \sin \theta = - k\lambda_1 I_1 - kMX_2 \cos \varphi_2$$

$$E_o \cos \theta = r_1 I_1 + kM X_2 \sin \varphi_2$$

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{k\lambda_1 I_1 + kM X_2 \cos \varphi_2}{r_1 I_1 + kM X_2 \sin \varphi_2}$$

En nous reportant à l'équation 4 et à l'équation générale (page 27), nous aurons :

$$X_2 \cos \varphi_2 = - \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} = - \frac{k^2 M \lambda_2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} I_1$$

$$X_2 \sin \varphi_2 = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} = \frac{k r_2 M}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} I_1$$

Nous aurons donc :

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{k\lambda_1 (r_2^2 + k^2 \lambda_2^2) - k^2 M^2 \lambda_2}{r_1 (r_2^2 + k^2 \lambda_2^2) + k^2 r_2 M^2}$$

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tg} \theta = k \frac{k^2 M^2 \lambda_2 - \lambda_1 (r_2^2 + k^2 \lambda_2^2)}{r_1 (r_2^2 + k^2 \lambda_2^2) + k^2 r_2 M^2}$$

En élevant au carré les équations et en les ajoutant, nous aurons :

$$E_a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = k^2 \lambda^2 I_1^2 + r_1^2 I_1^2 + k^2 M^2 X_2^2 (\sin^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2)$$

$$+ 2 k M I_1 (r_1 X_2 \sin \varphi_2 + k\lambda_1 X_2 \cos \varphi_2)$$

$$E_a^2 = k^2 \lambda^2 I_1^2 + r_1^2 I_1^2 + k^2 M X_2^2 + 2 k M I_1 (r_1 X_2 \sin \varphi_2 + k\lambda_1 X_2 \cos \varphi_2)$$

$$k^2 M^2 X_2^2 = \frac{k^4 M^4}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} I_1^2 \qquad \text{(page 87)}$$

$$r_1 X_2 \sin \varphi_2 + k\lambda_1 X_2 \cos \varphi_2 = \frac{k^2 r_1 r_2 M - k^3 \lambda_1 \lambda_2 M}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} I_1$$

$$(8) \qquad E_a^2 = \left\{ r_1^2 + k^2 \lambda_1^2 + k^2 M^2 \frac{2 r_1 r_2 + k^2 M^2 - 2 k^2 \lambda_1 \lambda_2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} \right\} I_1^2$$

Les équations 5, 6, 7, 8 permettront de résoudre tous les problèmes.

Clerk Maxwell a donné dans les *Philosophical Transactions*, une solution très élégante de la question, solution que nous allons indiquer.

Si on désigne par R' la résistance, et par λ' la quantité analogue à λ_1, que devrait avoir le circuit primaire, pour y obtenir, avec la f. e. m. appliquée, $e_a = E_a \sin (kt - \theta)$ un courant $i_1 = I_1 \sin kt$, quand le circuit secondaire est supprimé, on aura :

$$E_a \sin (kt - \theta) = R' i_1 + L' \frac{di_1}{dt} + V'$$

et en prenant la dérivée :

$$k E_a \cos (kt - \theta) = k R' I_1 \cos kt - k^2 L' I_1 \sin kt + \frac{I_1}{c'} \sin kt$$

en posant :

$$\lambda' = L' - \frac{1}{k^2 c'}$$

on aura :

$$E_a \cos (kt - \theta) = R' I_1 \cos kt - k \lambda' I_1 \sin kt$$

En faisant successivement dans cette équation, $kt = \frac{\pi}{2}$, et $kt = o$ nous aurons :

$$E_a \sin \theta = - k \lambda' I_1$$

$$E_a \cos \theta = R' I_1$$

Et, nous reportant aux équations trouvées précédemment (page 88), nous aurons :

$$k \lambda' I_1 = k \lambda_1 I_1 + k M X_2 \cos \varphi_2 = k \lambda_1 I_1 - \frac{k^2 M^2 \lambda_2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} I_1$$

$$(9) \qquad \lambda' = \lambda_1 - \frac{k M^2 \lambda_2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2}$$

$$(10) \qquad R\,I_1 = r_1 I_1 + k\,M X_2 \sin\varphi_2 = r_1 I_1 + \frac{k^2 M^2 r_2}{r_2^2 + k^2\lambda_2^2}\,I_1$$

et

$$(11) \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{R'}{k\,\lambda'}$$

$$(12) \qquad E_a^2 = (R'^2 + k^2\lambda'^2)\,I_1^2$$

En résumé, si nous désignons par $I_2 = X_2$, la valeur maximum du courant dans le circuit secondaire, nous aurons :

$$I_2 = \frac{k\,M}{\sqrt{r_2^2 + k^2\lambda_2^2}}\,I_1 \text{ (page 87)} \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{\sqrt{r_2^2 + k^2\lambda_2^2}}{k\,M}$$

$$I_1 = \frac{E_a}{\sqrt{R'^2 + k^2\lambda'^2}} \text{ (voir page 81).}$$

$\sqrt{r_2^2 + k^2\lambda_2^2}$ est la résistance apparente totale du circuit secondaire; si nous appelons la quantité $\sqrt{R'^2 + k^2\lambda'^2}$, la résistance apparente totale équivalente (1) du circuit primaire, nous pourrons écrire (2) :

$$\frac{\text{Valeur max. du courant primaire}}{\text{Valeur max. du courant secondaire}} = \frac{\text{résistance appar. totale du circuit second.}}{k\,M}$$

$$\text{Valeur max. du courant primaire} = \frac{\text{Valeur max. de la f.e.m. extérieure}}{\text{résistance appar. totale équivalente du prim.}}$$

Nous avons vu, page 87, que :

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{r_2}{k\,\lambda_2}$$

et page 88, que :

$$X_2 \sin\varphi_2 = \frac{k\,r_2\,M}{r_2^2 + k^2\lambda_2^2}\,I_1$$

(1) Clerk Maxwell, qui ne s'est occupé que du cas où les circuits ont seulement de la s. i., appelle la quantité :

$$\sqrt{R'^2 + k^2\,L'^2}$$

équivalent impedance.

(2) Voir Fleming : *The alternate current transformer*, page 153.

$$X_2 \cos \varphi_2 = - \frac{k^2 M \lambda_1}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2}$$

Comme X_2 est positif, le sinus est toujours positif; le cosinus sera positif si λ_1 est négatif, et négatif si λ_1 est positif.

Suivant que L_2 sera plus grand ou plus petit que $\frac{1}{k^2 C_2}$, le courant parcourant le circuit secondaire sera décalé de $\frac{\pi}{2}$ à π, ou de o à $\frac{\pi}{2}$, en arrière du courant circulant dans le circuit primaire.

Quand le circuit secondaire n'a que de la s. i., le décalage en arrière du courant secondaire est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π.

On a pu donner une explication des curieuses expériences de M. Elihu Thomson, à l'Exposition de 1889, dont les principales étaient :

1° La répulsion d'un anneau de cuivre, entourant un électro-aimant parcouru par des courants alternatifs.

2° L'allumage d'une lampe à incandescence, placée dans un liquide, au-dessus d'un électro-aimant parcouru par des courants alternatifs; la répulsion de cette lampe, qui monte dans le liquide, suivie de son extinction.

En représentant par des courbes l'intensité du courant parcourant le circuit primaire et le circuit secondaire, en fonction du temps, on voit immédiatement que si le décalage est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, les courants sont de sens contraire pendant la plus grande partie du temps. Or, deux courants de sens contraire se repoussent avec une force proportionnelle à leur intensité; les courants s'attirent au contraire quand ils sont du même sens.

Sur la figure 19, on voit qu'il y a attraction entre AB, CD et EF, et répulsion entre B et C et entre D et E, et de plus que, dans la période répulsive, les intensités sont supérieures à celles de la période attractive.

Quand un circuit secondaire a de la s. i., il tend donc à être repoussé par le circuit primaire.

C'est ce qui a lieu dans les expériences de M. Elihu Thomson : l'anneau dans un cas, la bobine placée au-dessous de la lampe, et dans lequel est intercalé le filament de cette dernière, pouvant être consi-

dérés comme le circuit secondaire, l'enroulement de l'électro-aimant, étant le circuit primaire.

L'extinction de la lampe, après sa répulsion, est due à ce que le

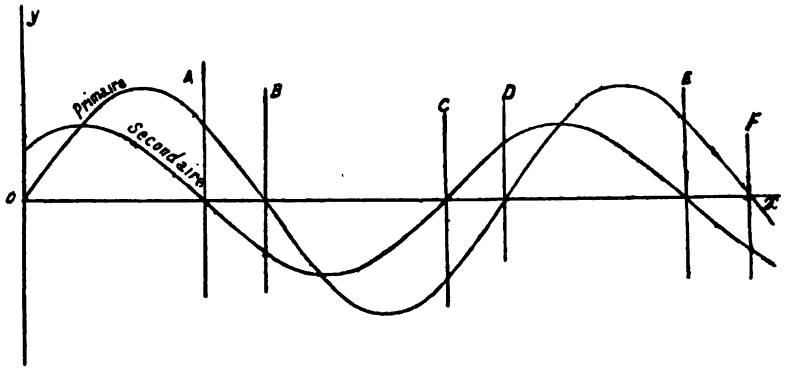


Fig. 19.

coefficient d'induction mutuelle des deux circuits diminue très rapidement avec leur distance. L'intensité maximum du courant secondaire :

$$I_2 = \frac{k\,M}{\sqrt{r_2^2 + L_2^2}}\ I_1$$

diminue donc très rapidement, et il arrive un moment où ce courant ne peut plus porter à l'incandescence le filament de la lampe.

Comme nous le verrons plus loin, les *transformateurs* sont des appareils destinés à transformer un courant alternatif, ayant une intensité efficace, et une f. e. m. efficace données, en un courant ayant une intensité efficace, et une f. e. m. efficace différentes.

Ils se composent d'un noyau (ordinairement en fer ou en métal magnétique) formant un circuit magnétique, qui peut être ouvert ou fermé, sur lequel sont enroulées un certain nombre de spires n_1 du circuit primaire (celui dans lequel agit la f. e. m. extérieure) et n_2, spires du circuit secondaire.

M. Hopkinson a indiqué une méthode indirecte de calcul, dans laquelle interviennent les nombres de spires enroulées sur le noyau du transformateur.

En supposant la perméabilité du noyau constante, si $\mathcal{R}$ désigne la résistance du circuit magnétique, on a :

$$\mathcal{R} = \Sigma \frac{l}{\mu s}$$

l indiquant les longueurs des diverses parties du circuit magnétique, s leurs sections, et μ leurs perméabilités (supposées constantes).

M. Hopkinson suppose que le flux magnétique dans le noyau varie sinusoïdalement, de sorte que si Φ désigne le flux de force à un instant donné, et Φ_o la valeur maximum de ce flux, on ait :

$$\Phi = \Phi_o \sin kt$$

D'autre part, si i_1 et i_2 représentent les valeurs instantanées des intensités du courant primaire et du courant secondaire, on a :

$$4\pi (n_1 i_1 + n_2 i_2) = \Phi \mathcal{R} = \mathcal{R}\ \Phi_o \sin kt$$

Posons :

$$i_1 = I_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

$$i_2 = I_2 \sin (kt - \varphi_2)$$

I_1 et I_2 représentant les intensités maxima des courants qui circulent dans le circuit primaire et dans le circuit secondaire.

Le flux de force total, traversant le circuit secondaire à un moment donné, est :

$$\Phi'_2 = n_2 \Phi$$

la f. e. m. d'induction, agissant dans ce circuit, qui est la f. e. m. appliquée, est donc :

$$-\frac{d\Phi'_2}{dt} = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} = -kn_2 \Phi_o \cos kt$$

Si L_2 est le coefficient de s. i. de la partie de ce circuit, *située en dehors du transformateur* on aura la relation :

$$(1) \qquad kn_2 \Phi_o \cos kt + k L_2 I_2 \cos (kt - \varphi_2) + r_2 I_2 \sin (kt - \varphi_2) = o$$

D'autre part, la relation :

$$4\pi (n_1 i_1 + n_2 i_2) = \mathcal{R}\ \Phi_o \sin kt$$

donne :

$$\iota_1 = \frac{\mathcal{R}\,\Phi_o}{4\pi\, n_1}\, i_1 \sin kt - \frac{n_2}{n_1}\, i_1$$

(2) $$I_1 \sin (kt - \varphi_1) = \frac{\mathcal{R}\,\Phi_o}{4\pi\, n_1} \sin kt - \frac{n_2}{n_1} I_2 \sin (kt - \varphi_2).$$

Si L_1 et r_1 représentent le coefficient de s. i. (en dehors du transformateur) et la résistance du circuit primaire, et si on désigne par :

$$e_a = E_a \sin (kt - \theta)$$

a f. e, m. extérieure à appliquer à ce circuit pour avoir :

$$i_1 = I_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

Les f. e. m., agissant dans ce circuit seront :

$$e_a - L \frac{di_1}{dt} = - k L_1 I_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

et la f. e. m., due à la variation du flux dans le noyau, qui sera :

$$e_1' = - k n_1 \Phi_o \cos kt$$

Nous aurons donc :

(3) $$E_a \sin (kt - \theta) = r_1 I_1 \sin (kt - \varphi_1) + k L_1 I_1 \cos (kt - \varphi_1) + k n_1 \Phi_o \cos kt$$

Les équations (1), (2) et (3) permettent de résoudre les différents problèmes, relatifs aux transformateurs.

Dans le cas, où les coefficients de s. i. des parties des circuits situées en dehors du transformateur, L_1 et L_2, sont assez petits pour pouvoir être négligés, les équations deviennent :

(1) $$k n_2 \Phi_o \cos kt + r_2 I_2 \sin (kt - \varphi_2) = o$$

(2) $$I_1 \sin (kt - \varphi_1) = \frac{\mathcal{R}\,\Phi_o}{4\pi\, n_1} \sin kt - \frac{n_2}{n_1} I_2 \sin (kt - \varphi_2)$$

(3) $$E_a \sin (kt - \theta) = r_1 I_1 \sin (kt - \varphi_1) + k n_1 \Phi_o \cos kt$$

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, dans l'équation 1, on aura :

$$r_2 I_2 \sin \varphi_2 = k n_2 \Phi_o$$

$$r_2 I_2 \cos \varphi_2 = o$$

En élevant au carré et en additionnant, on aura :

$$r_2^2 I_2^2 = k^2 n_2^2 \Phi_o^2$$

$$I_2 = \frac{k n_2}{r_2} \Phi_o \quad \text{tg } \varphi_2 = \infty \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, dans l'équation 2, on aura :

$$- I_1 \sin \varphi_1 = \frac{n_2}{n_1} I_2 \sin \varphi_2$$

$$I_1 \sin \varphi_1 = - \frac{k n_2^2}{r_2 n_1} \Phi_o$$

$$I_1 \cos \varphi_1 = \frac{\mathcal{R} \Phi_o}{4 \pi n_1} - \frac{n_2}{n_1} I_2 \cos \varphi_2 = \frac{\mathcal{R} \Phi_o}{4 \pi n_1}$$

En élevant au carré et en additionnant, on aura :

$$I_1^2 = \left(\frac{k^2 n_2^4}{r_2^2 n_1^2} + \frac{\mathcal{R}^2}{16 \pi^2 n_1^2} \right) \Phi_o^2 = \frac{16 \pi^2 k^2 n_2^4 + r_2^2 \mathcal{R}^2}{16 \pi^2 n_1^2 r_2^2} \Phi_o^2$$

En divisant la première relation par la seconde, on aura :

$$\text{tg } \varphi_1 = - \frac{k n_2^2 4 \pi n_1}{r_2 n_1 \mathcal{R}} = - \frac{4 \pi k n_2^2}{r_2 \mathcal{R}}$$

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, dans l'équation 3, on aura :

$$- E_a \sin \theta = - r_1 I_1 \sin \varphi_1 + k n_1 \Phi_o$$

$$E_a \cos \theta = r_1 I_1 \cos \varphi_1$$

En élevant au carré et en additionnant, on aura :

$$E_a^2 = r_1^2 I_1^2 + k^2 n_1^2 \Phi_o^2 - 2 k r_1 n_1 \Phi_o I_1 \sin \varphi_1$$

$$E_a = \left\{ r_1^2 \frac{16 \pi^2 k^2 n_2^2 + r_2^2 \mathfrak{R}^2}{16 \pi^2 n_1^2 r_2^2} + k^2 n_1^2 + \frac{2 k r_1 n_1 n_2 . k n_2}{r_2 n_1} \right\} \Phi_o^2$$

$$E_a^2 = \frac{16 \pi^2 k^2 n_2^2 r_1^2 + r_1^2 r_2^2 \mathfrak{R}^2 + 16 \pi^2 k^2 n_1^2 r_2^2 + 32 \pi^2 k^2 n_1^2 n_2^2 r_1 r_2}{16 \pi^2 n_1^2 r_2^2} \Phi_o^2$$

$$E_a^2 = \frac{16 \pi^2 k^2 \left\{ r_1^2 n_2^2 + 2 n_1^2 n_2^2 r_1 r_2 + r_2^2 n_1^2 \right\} + r_1^2 r_2^2 \mathfrak{R}^2}{16 \pi^2 n_1^2 r_2^2} \Phi_o^2$$

$$E_a^2 = \frac{16 \pi^2 k^2 (r_1 n_2^2 + r_2 n_1^2)^2 + r_1^2 r_2^2 \mathfrak{R}^2}{16 \pi^2 n_1^2 r_2^2} \Phi_o^2$$

En divisant la première relation par la seconde, on aura :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r_1 I_1 \sin \varphi_1 - k n_1 \Phi_o}{r_1 I_1 \cos \varphi_1} = - \frac{\frac{k r_1 n_2^2}{r_2 n_1} + k n_1}{\frac{r_1 \mathfrak{R}}{4 \pi n_1}} = - 4 \pi k . \frac{r_1 n_2^2 + r_2 n_1^2}{r_1 r_2 \mathfrak{R}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{4 \pi k}{\mathfrak{R}} \left(\frac{n_1^2}{r_1} + \frac{n_2^2}{r_2} \right)$$

Rendement des transformations. — Le rendement d'un transformateur est égal au rapport de la puissance recueillie dans le secondaire, à la puissance dépensée dans le primaire.

La puissance dépensée dans le primaire sera, si e_a est la f. e. m. aux bornes de ce circuit, $e_a i_1$; la puissance recueillie sera $r_2 i_2^2$ et le rendement sera :

$$R^t = \frac{(r_2 i_2^2)_{moy}}{(e_a i_a)_{moy}}$$

On a page 85 :

$$r_2 i_2^2 = r_2 X_2^2 \sin^2 (kt - \varphi_2)$$

$$(r_2 i_2^2) = \frac{r_2 X_2^2}{2} \quad \text{(page 20)}$$

$$(r_2\, i_2^2)_{moy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2 r_2 M^2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} I_1^2$$

$$i_1 = I_1 \sin kt \qquad e_a = E_a \sin (kt - \theta)$$

$$e_a i_1 = E_a I_1 \sin kt \sin (kt - \theta) = E_a I_1 \sin kt \cdot \cos \left(kt - \theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(e_a i_1)_{moy} = \frac{E_a I_1}{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{E_a \cos \theta}{2} I_1 \text{ (page 20)}$$

$$E_a \cos \theta = r_1 I_1 + k M X_2 \sin \varphi_2 = r_1 I_1 + \frac{k^2 r_2 M^2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} I_1 \text{ (page 88).}$$

$$(e_a i_1)_{moy} = \frac{1}{2} \left(r_1 + \frac{k^2 r_2 M^2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2} \right) I_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_1 r_2^2 + k^2 r_1 \lambda_2^2 + k^2 r_2 M^2}{r_2^2 + k^2 \lambda_2^2}$$

On aura donc :

$$R_t = \frac{(r_2\, i_2^2)_{moy}}{(e_a i_1)_{moy}} = \frac{k^2 r_2 M^2}{r_1 r_2^2 + k^2 r_1 \lambda_2^2 + k^2 r_2 M^2} = 1 - \frac{r_1 r_2^2 + k^2 r_1 \lambda_2^2}{r_1 r_2^2 + k^2 r_1 \lambda_2^2 + k^2 r_2 M^2}$$

En employant la méthode de M. Hopkinson, et en supposant que la portion du circuit secondaire, située en dehors du transformateur, n'a pas de s. i., on a (pages 93 et suivantes) :

$$(r_2\, i_2^2)_{moy} = \frac{r_2 X_2^2}{2} = \frac{r_2 I_2^2}{2} = \frac{k^2 n_2^2}{2 r_2} \Phi_0^2 \text{ (page 95)}$$

$$e_a = E_a \sin (kt - \theta) \qquad i_1 = I_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

$$e_a\, i_1 = E_a I_1 \sin (kt - \theta) \sin (kt - \varphi_1) = E_a I_1 \left\{ \sin^2 kt \cos \theta \cos \varphi_1 \right.$$

$$\left. - \sin kt \cos kt (\sin \theta \cos \varphi_1 + \cos \theta \sin \varphi_1) + \cos^2 kt \sin \theta \sin \varphi_1 \right\}$$

On aura, voir page 20 :

$$(e_a i_1)_{moy} = \frac{1}{2} (E_a I_1 \cos \theta \cdot \cos \varphi_1 + E_a I_1 \sin \theta \cdot \sin \varphi_1) =$$

$$(e_a i_1)_{moy} = \frac{1}{2} (r_1 I_1^2 \cos^2 \varphi_1 + r_1 I_1^2 \sin^2 \varphi_1 - k n_1 \Phi_0 I_1 \sin \varphi_1) \text{ (page 95)}$$

$$(e_a\ i_1)_{moy} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2 r_1 n_2^2}{n_1^2 r_2^2} + \frac{r_1 \mathcal{R}^2}{16\pi^2 n_1^2} + \frac{k^2 n_1 n_2^2}{n_1 r_2}\right)\Phi_0^2$$

$$(e_a\ i_1)_{moy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16\pi^2 k^2 n_1^2 (r_1 n_2^2 + r_2 n_1^2) + r_1 r_2^2 \mathcal{R}^2}{16\pi^2 r_2^2 n_1^2}\ \Phi_0^2$$

On aura donc :

$$R' = \frac{16\pi^2 k^2 n_1^2 n_2^2 r_2^2}{r_2\left\{16\pi^2 k^2 n_2^2 (r_1 n_1^2 + r_2 n_1^2) + r_1 r_2^2 \mathcal{R}^2\right\}} = \frac{16\pi^2 k^2 n_1^2 n_2^2 r_2}{r_1 r_2^2 \mathcal{R}^2 + 16\pi^2 k^2 n_2^2 (r_1 n_2^2 + r_2 n_1^2)}$$

Dans les transformateurs à circuit magnétique fermé, $\mathcal{R}$ est très petit et peut être négligé, on a alors

$$R' = \frac{16\pi^2 k^2 n_1^2 n_2^2 r_2}{16\pi^2 k^2 n_2^2 (r_1 n_2^2 + r_2 n_1^2)} = \frac{r_2 n_1^2}{r_1 n_2^2 + r_2 n_1^2} = \frac{1}{1 + \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

L'expression du rendement théorique est donc de la forme :

$$\frac{k^2}{a + b\,k^2},$$

la dérivée première, qui est :

$$\frac{2\,a\,k}{(a + b\,k^2)^2}$$

est positive.

Le rendement théorique augmente donc avec k, c'est-à-dire avec la fréquence :

$$F = \frac{k}{2\pi}.$$

D'autre part, dans le rendement réel interviennent les pertes par courants de Foucault et par hystérésis, qui, comme nous le verrons plus loin, augmentent avec la fréquence.

Un transformateur donné, doit donc avoir un rendement maximum pour une certaine fréquence, c'est ce que M. Mordey a reconnu expérimentalement.

Le transformateur qu'il a étudié, avait un rendement maximum pour une fréquence de 100, c'est-à-dire $k = 628$ environ.

Le cas *d'un transformateur ayant deux circuits secondaires distincts*, peut être étudié de la manière suivante :

Désignons par i, r et L, l'intensité du courant, la résistance, le coefficient de s. i. du circuit primaire, par c la capacité d'un condensateur intercalé dans ce circuit, par i_1, r_1, L_1 et c_1 les quantités correspondantes pour le premier circuit secondaire et par i_2, r_2, L_2 et c_2 celles du deuxième circuit secondaire, par $e_a = E_a \sin (kt - \theta)$ la f. e. m. appliquée au circuit secondaire par M_1 le coefficient d'induction mutuelle du primaire et du premier secondaire, par M_2, celui du primaire et du deuxième secondaire, par M celui des deux secondaires.

En posant :

$$i = I \sin kt, \quad i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1), \quad i_2 = X_2 \sin (kt - \varphi_2)$$

nous aurons :

$$e_a - M_1 \frac{di_1}{dt} - M_2 \frac{di_2}{dt} - L \frac{di}{dt} - V - ri = o$$

$$-M_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} - V_1 - r_1 i_1 = o$$

$$-M_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} - V_2 - r_2 i_2 = o$$

Mais :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{c} = \frac{I \sin kt}{c}, \quad V = -\frac{I \cos kt}{kc}$$

de même on aura :

$$V_1 = -\frac{X_1}{kc_1} \cos (kt - \varphi_1) \qquad V_2 = -\frac{X_2}{kc_2} \cos (kt - \varphi_2)$$

$$E_a \sin (kt - 0) - k . M_1 X_1 \cos (kt - \varphi_1) - k M_2 X_2 \cos (kt - \varphi_2) - k L I \cos k$$

$$+ \frac{I}{k c} \cos kt - rI \sin kt = o$$

$$- k\,M_1\,I\cos kt - kM\,X_2\cos(kt-\varphi_2) - kL_1\,X_1\cos(kt-\varphi_1)$$
$$+\frac{X_1}{kc_1}\cos(kt-\varphi_1) - r_1\,X_1\sin(kt-\varphi_1) = o$$

$$- kM_2\,I\cos kt - kMX_1\cos(kt-\varphi_1) - kL_2X_2\cos(kt-\varphi_2)$$
$$+\frac{X_2}{kc_2}\cos(kt-\varphi_2) - r_2X_2\sin(kt-\varphi_2) = o$$

En posant :

$$\lambda = L - \frac{1}{k^2 c} \qquad \lambda_1 = L_1 - \frac{1}{k^2 c_1} \qquad \lambda_2 = L_2 - \frac{1}{k^2 c_2}$$

nous aurons :

(1) $$E_\alpha \sin kt - \theta) - kM_1\,X_1\cos(kt-\varphi_1) - k\,M_2\,X_2\cos(kt-\varphi_2)$$
$$- k\lambda\cos kt - r\,I\sin kt = o$$

(2) $$kM_1\,I\cos kt + kMX_2\cos(kt-\varphi_2) + k\lambda_1\,X_1\cos(kt-\varphi_1) + r_1\,X_1\sin(kt-\varphi_1) = o$$

(3) $$kM_2\,I\cos kt + kMX_1\cos(kt-\varphi_1) + k\lambda_2\,X_2\cos(kt-\varphi_2) + r_2\,X_2\sin(kt-\varphi_2) = o$$

Ces trois équations permettront de résoudre les différents problèmes relatifs aux *transformateurs à double circuit secondaire.*

En employant la méthode de M. Hopkinson, et en désignant par n, n_1, n_2, le nombre de spires de chacun des trois circuits, enroulées sur le transformateur par $\mathfrak{R}$ la résistance du circuit magnétique ; par $\Phi = \Phi_o \sin kt$ la valeur instantanée de flux ; nous aurons :

$$4\pi(ni + n_1 i_1 + n_2 i_2) = \Phi\,\mathfrak{R} = \mathfrak{R}\,\Phi_o \sin kt$$

Le flux de force traversant chacun des circuits sera à un instant donné :

Pour le primaire :

$$n\,\Phi = n\,\Phi_o \sin kt$$

Pour le premier secondaire :

$$n_1\,\Phi = n_1\,\Phi_o \sin kt$$

Pour le deuxième secondaire :

$$n_2 \Phi = n_2 \Phi_o \sin kt$$

Les f. e. m. dues à la variation du flux de force, seront respectivement pour chacun des circuits :

$$-kn\Phi_o \cos kt, \qquad -kn_1 \Phi_o \cos kt, \qquad -kn_2 \Phi_o \cos kt$$

Si on désigne par L, L_1 et L_2 les coefficients de s. i., de la portion de chacun des circuits placée en dehors du transformateur, on aura en considérant chacun de ces circuits :

$$E_a \sin (kt - \theta) - kn\Phi_o \cos kt - k L_1 I \cos (kt - \varphi) - r I \sin (kt - \varphi) = o$$

$$k n_1 \Phi_o \cos kt + k L_1 X_1 \cos (kt - \varphi_1) + r_1 X_1 \sin (kt - \varphi_1) = o$$

$$kn_2 \Phi_o \cos kt + kL_2 X_2 \cos (kt - \varphi_2) + r_2 X_2 \sin (kt - \varphi_2) = o$$

Équations qui permettent de résoudre tous les problèmes relatifs au transformateur à double circuit secondaire.

Nous verrons plus loin que les phénomènes sont profondément modifiés par l'hystérésis, les courants de Foucault et la variation de perméabilité du noyau, quand celui-ci est formé d'un métal magnétique.

§ 11. — CIRCUITS DÉRIVÉS AVEC INDUCTION MUTUELLE

Les deux circuits d'une dérivation peuvent réagir l'un sur l'autre, c'est-à-dire avoir un coefficient d'induction mutuelle.

Désignons par r_1 et r_2 les résistances des circuits, par L_1 et L_2 leurs coefficients de s.i., par M, leur coefficient d'induction mutuelle (nous supposons L_1, L_2 et M constants), par i_1 et i_2 les valeurs instantanées des intensités des courants, par $i = I \sin kt$, la valeur instantanée de l'intensité du courant avant la dérivation.

Faisons :

$$i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

$$i_2 = X_2 \sin (kt - \varphi_2)$$

Nous aurons à chaque instant :

$$i = i_1 + i_2$$

(1) $$I \sin kt = X_1 \sin (kt - \varphi_1) + X_2 \sin (kt - \varphi_2)$$

Si nous désignons par e, la valeur instantanée de la différence de potentiel aux bornes de la dérivation, nous aurons successivement :

$$e = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

(2) $$e = r_1 X_1 \sin (kt - \varphi_1) + k L_1 X_1 \cos (kt - \varphi_1) + k M X_2 \cos (kt - \varphi_2)$$

$$e = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

(3) $$e = r_2 X_2 \sin (kt - \varphi_2) + k L_2 X_2 \cos (kt - \varphi_2) + k M X_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

En retranchant l'équation 3, de l'équation 2, nous aurons :

(4) $$r_1 X_1 \sin (kt - \varphi_1) - r_2 X_2 \sin (kt - \varphi_2) + k L_1 X_1 \cos (kt - \varphi_1) - k L_2 X_2 \cos (kt - \varphi_2)$$
$$+ k M X_2 \cos (kt - \varphi_2) - k M X_1 \cos (kt - \varphi_1) = o$$

De l'équation 1, nous tirons :

$$X_2 \sin (kt - \varphi_2) = I \sin kt - X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

et, en différentiant :

$$k X_2 \cos (kt - \varphi_2) = kI \cos kt - kX_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

$$X_2 \cos (kt - \varphi_2) = I \cos kt - X_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

Portant ces valeurs dans l'équation (4), nous aurons :

$$r_1 X_1 \sin (kt - \varphi_1) - r_2 I \sin kt + r_2 X_1 \sin (kt - \varphi_1) + k L_1 X_1 \cos (kt - \varphi_1)$$
$$- k L_2 I \cos kt + k L_2 X_1 \cos (kt - \varphi_1) + k M I \cos kt$$
$$- 2 k M X_1 \cos (kt - \varphi_1) = o$$

$$- r_2 I \sin kt + k(M - L_2) I \cos kt + (r_1 + r_2) X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

$$+ k(L_1 + L_2 - 2M) X_1 \cos (kt - \varphi_1) = o$$

En nous reportant à l'équation générale (page 27), nous avons :

$$A = - r_2 I \qquad C = r_1 + r_2$$

$$B = k(M - L_2) I \qquad D = k(L_1 + L_2 - 2M)$$

d'où :

$$X_1^2 = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{r_2^2 + k^2 (M - L_2)^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2 - 2M)^2} I^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{AD - BC}{AC + BD} = k \frac{r_2 (L_1 + L_2 - 2M) + (r_1 + r_2)(M - L_2)}{r_2 (r_1 + r_2) - k^2 (M - L_1)(L_1 + L_2 - 2M)}$$

On aura, par raison de symétrie :

$$X_2^2 = \frac{r_1^2 + k^2 (M - L_1)^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (L_1 + L_2 - 2M)^2} I^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = k \frac{r_1 (L_1 + L_2 - 2M) + (r_1 + r_2)(M - L_1)}{r_1 (r_1 + r_2) - k^2 (M - L_1)(L_1 + L_2 - 2M)}$$

En faisant $M = o$, dans ces formules, on voit que l'on obtient celles des pages 60 et 61.

En posant $e = \Sigma \sin (kt - \theta)$, on pourra trouver les valeurs de Σ et de θ.

§ 12. — THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

La représentation graphique, des divers phénomènes qui se produisent quand une f. e. m. périodique simple est appliquée à un circuit pourvu de s. i. (dont le coefficient de s. i, est constant) et de capacité, est due à M. Blakeslay. Nous allons en examiner la théorie et en donner les principales applications.

Considérons (1) (fig. 20) une droite OA, tournant autour d'un point O, avec une vitesse angulaire k et faisant à l'instant donné, un angle $\omega = kt$ avec une droite Ox (La rotation ayant lieu en sens inverse des aiguilles d'une montre).

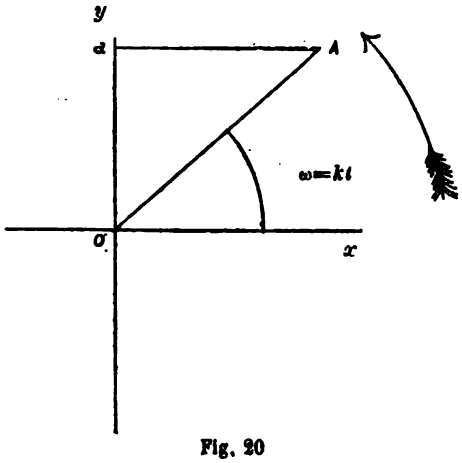


Fig. 20

Si Oa est la projection de OA, sur un axe Oy perpendiculaire à Ox, on aura :

$$Oa = OA \sin kt$$

Si OA, est proportionnel à la valeur maximum d'une fonction périodique simple, la valeur instantanée de cette dernière, sera proportionnelle à Oa.

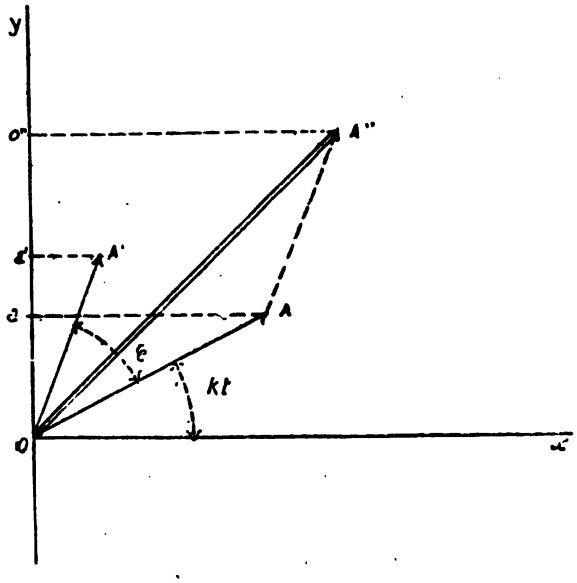


Fig. 21

(1) Blakeslay. — *Les Courants alternatifs d'électricité*, traduit de l'anglais, par M. W. C. Rechnewski.

On pourra donc représenter par une droite tournant autour d'un point avec une vitesse angulaire k, une f. e. m. périodique simple.

Supposons maintenant que l'on ait deux f. e. m. périodiques simples de même phase agissant sur un circuit et ayant les valeurs instantanées

$$e = E_o \sin kt$$

$$e' = E'_o \sin (kt + \varphi)$$

La première pourra être représentée par OA (fig. 21) et la deuxième par OA', faisant avec la première (dans le sens positif)un angle φ.

Si Oa et Oa' sont les projections de OA et OA' sur Oy, la valeur instantanée de la résultante sera proportionnelle à :

$$Oa + Oa'$$

Si par A, nous menons une parallèle AA" égale à OA' la ligne OA" représentera la résultante des deux f. e. m., en effet, il est facile de voir que l'on a :

$$Oa'' = Oa + Oa'$$

La composition de deux forces électromotrices, correspond donc exactement à la composition des vitesses ou des forces.

On peut facilement généraliser.

Si des droites telles que OA, AB, BC... KL (fig. 22), représentent diverses f.e.m., la résultante sera représentée par la ligne de fermeture OL du polygone.

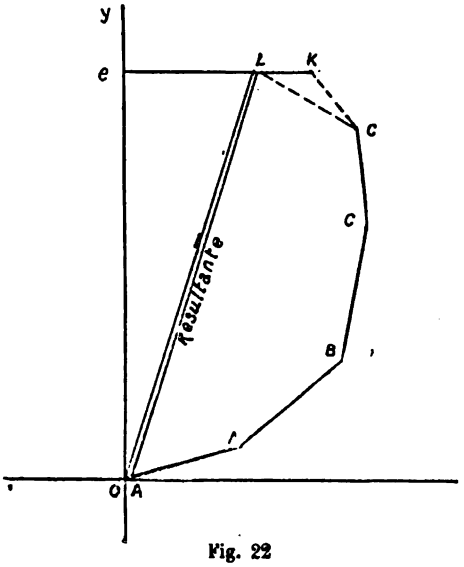


Fig. 22

Si pour un circuit, on a tenu compte de toutes les f. e. m., qui y agissent, la valeur maximum de l'intensité du courant sera proportionnelle à la longueur de la ligne de fermeture du polygone

et la valeur instantanée sera proportionnelle à la projection de la ligne de fermeture sur l'axe O*y*.

Si *m* est le rapport de proportion pour les f. e. m., c'est-à-dire, si on a, par exemple :

$$E_1 = m\,\overline{AB}$$

$$E_2 = m\,\overline{BC} \quad \text{etc.}$$

La valeur maximum de l'intensité du courant sera, si *r* est la résistance du circuit :

$$I = \frac{m\,\overline{OL}}{r}$$

et la valeur instantanée.

$$i = \frac{m\,\overline{Oi}}{r}$$

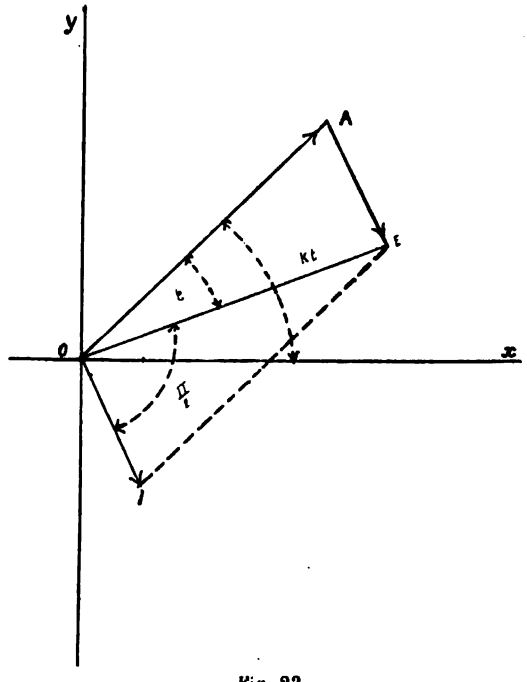


Fig. 23

Self induction. — Une f. e. m. extérieure $E_a \sin kt$ est appliqué à un circuit de résistance *r*, ayant un coefficient de s. i., L.

Nous savons que la f. e. m. effective est en retard d'un angle φ, donné par la relation $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k\,L}{r}$, par rapport à la f. e. m. appliquée.

Si donc OA (fig. 23) représente la f. e. m. appliquée, la f. e. m, effective sera représentée en direction, par la droite OE, faisant l'angle φ avec OA, φ étant compté dans le sens négatif. Il sera donc facile de tracer OE.

D'autre part, la f. e. m. effective est la résultante de la f. e. m. appliquée et de la f. e. m de s. i.

Si $X \sin (kt - \varphi)$ est la valeur instantanée de la f. e. m. effective, celle de la f. e. m. de s. i. sera :

$$- kL\,X \cos (kt - \varphi) = kL\,X \sin \left(kt - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

La f. e. m. de s. i. fera donc un angle $-\frac{\pi}{2}$ avec la f. e. m. effective, la direction de la droite qui la représentera sera donc OI.

Pour trouver les valeurs maxima des f. e. m. il suffira de mener par A une perpendiculaire AE sur la direction OE et si :

$$E_a = m\,\overline{OA}$$

on aura :

$$I = m\,\frac{\overline{OE}}{r} \qquad \text{et} \qquad E_s = m\,\overline{AE}$$

$$e_{s\,max} = E_s = m.\,\overline{AE}$$

D'après les relations trouvées page 33, on a :

$$e_s = -\frac{k.\,L\,E_a}{r} \cos \varphi \cos (kt - \varphi) \qquad E_s = \frac{k\,L.\,E_a}{r} \cos \varphi$$

$$i = \frac{E_a}{r} \cos \varphi \sin (kt - \varphi) \qquad I = \frac{E_a}{r} \cos \varphi$$

$$E_s = k.L.I$$

Si I est donné, on prendra (fig. 24) OB proportionnel a rI, et l'on mènera en B une perpendiculaire BC dont la longueur sera proportionnelle à k L I.

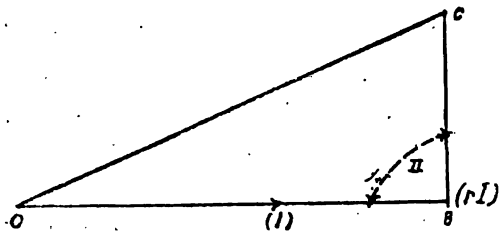


Fig. 24

On aura bien :

$$\text{tg COB} = \text{tg}\,\varphi = \frac{mk\,\text{LI}}{m\,r\,\text{I}} = \frac{k\,\text{L}}{r}$$

Condensateur intercalé dans le circuit. — Une f. e. m. extérieure, $e_a = E_a \sin kt$ est appliquée à un circuit de résistance r, dans lequel est intercalé un condensateur de capacité c.

Nous savons que la f. e. m. effective est en avance d'un angle φ' donné par la relation $\text{tg}\,\varphi' = \frac{1}{kcr}$, par rapport à la f. e. m. appliquée.

Si donc OA (fig. 25) représente la f. e. m. appliquée, la f. e. m. ef-

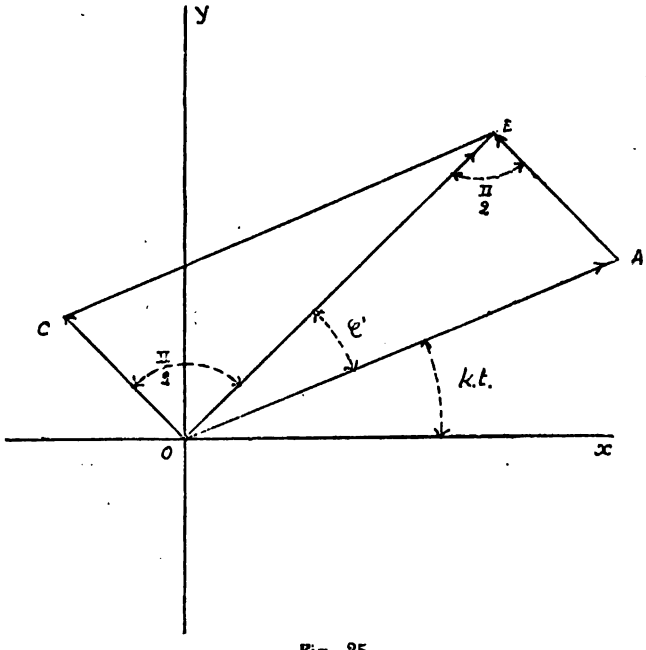


Fig. 25

fective sera représentée en direction par OE, faisant l'angle φ' avec OA, φ' étant porté dans le sens positif de rotation.

D'autre part, la f. e. m. effective est la résultante de la f. e. m. appliquée et de la f. e. m. due à la capacité.

Si $X \sin (kt + \varphi')$ est la f. e. m. effective, la f. e. m. due à la capacité sera représentée par une fonction de la forme $X' \cos (kt + \varphi')$ ou :

$$X' \sin \left(kt + \varphi' + \frac{\pi}{2} \right)$$

La f. e. m. due à la capacité fait donc un angle $\frac{\pi}{2}$ avec la f. e m. effective.

Il suffira donc de mener par A, une perpendiculaire OE, OE représentera la f. e. m. efficace et AE = OC, la f. e. m. due à la capacité.

Puisque :

$$E_a = m \overline{OA}$$

on aura :

$$E_c = V = m. \overline{AE}.$$

D'après les relations de la page 42, on a,

$$e_c = - E_a \sin \varphi \cos (kt - \varphi) \qquad E_c = E_a \sin \varphi$$

$$i = \frac{E_a}{r} \cos \varphi . \sin (kt - \varphi) \qquad I = \frac{E_a}{r} \cos \varphi$$

$$E_c = r . \operatorname{tg} \varphi . I \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{kcr}$$

$$E_c = \frac{I}{kc}$$

Si I est donné, on prendra (fig. 26) OB proportionnel à rI, BC sera

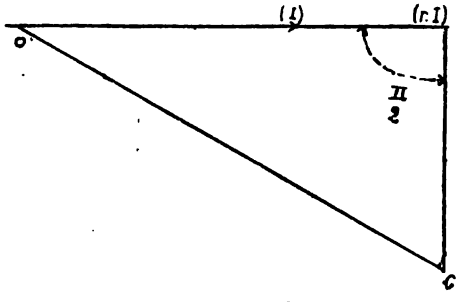


Fig. 26

perpendiculaire à OB et sa longueur sera proportionnelle à $\frac{I}{kc}$. La f. e. m. extérieure à appliquer sera représentée par OC.

On aura :

$$\text{tg COB} = \text{tg } \varphi' = \frac{\frac{I}{kc}}{rI} = \frac{1}{kcr}$$

Circuit comprenant une s. i. et un condensateur. — Si l'on donne E_a, on prendra (fig. 27) OA proportionnel à E_a.

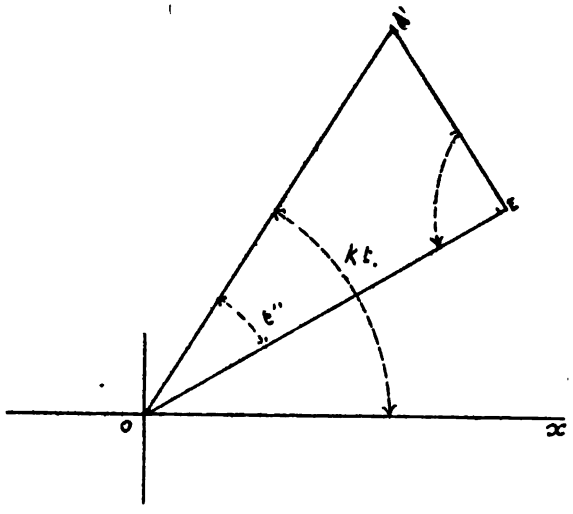


Fig. 27

On calculera ensuite :

$$\text{tg } \varphi'' = \frac{k^2 Lc - 1}{krc} \text{ (page 45)}$$

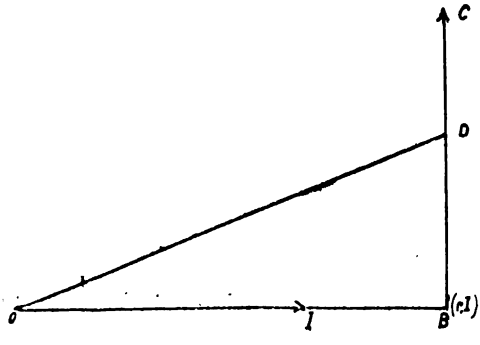


Fig. 28

Suivant que cette valeur sera positive ou négative, on portera l'angle φ'' dans le sens négatif ou dans le sens positif de rotation. On aura ainsi la direction de OE, la perpendiculiare AE abaissée de A sur OE, représentera la résultante des f. e. m. de capacité et de s. i.

Si I est donné, on prendra (fig. 28) OB proportionnel à rI, on fera BC proportionnel à kLI et CD proportionnel à $\frac{I}{kc}$, OD représentera la f. e. m. extérieure à appliquer.

On a :

$$\text{tg DOB} = \text{tg } \varphi'' = \frac{BC - CD}{OB} = \frac{kLI - \frac{I}{kc}}{rI} = \frac{k^2Lc - 1}{kcr}$$

Cas des circuits dérivés. — Dans ce cas, nous prendrons comme donnée, l'intensité maximum du courant dans un des circuits dérivés.

Le produit de l'intensité maximum par la résistance du circuit dérivé, donnera la valeur maximum de la f. e. m. effective agissant dans ce circuit. La valeur maximum de la f. e. m. extérieure appliquée à ce circuit sera trouvée graphiquement, en procédant comme il est indiqué ci-dessus, ce sera aussi la valeur maximum de la f. e. m. agissant aux bornes de la dérivation ou la f. e. m. appliquée à l'autre circuit (ou aux autres circuits).

Des valeurs de la résistance, de la capacité et de la s. i., de cet autre circuit, on déduira la valeur de la f. e. m. effective qui y agit.

En divisant cette quantité par la résistance, on aura la valeur maximum de l'intensité. La résultante des courants dans chacune des dérivations donnera l'intensité du courant dans le circuit principal. On en déduira la f. e. m. effective dans ce circuit, et il sera facile, d'après sa résistance, sa s. i. et sa capacité, de trouver la valeur maximum de la f. e. m. extérieure à appliquer.

Soient, par exemple, deux circuits possédant de la s. i. et de la capacité dérivés d'un circuit principal, ayant également de la capacité et de la s. i., la fig. 12 de la page 63, indique les valeurs des diverses quantités.

I_1, est donné.

Prenons OA proportionnel à $r_1 I_1$ (fig. 29), nous mènerons AB perpendiculaire à OA, et nous prendrons AB proportionnel à kL_1I_1, BC proportionnel à $\frac{I_1}{kc_1}$, OC représentera la f. e. m. agissant aux bornes de la dérivation.

Menons la ligne OD faisant avec OA l'angle φ'' de sorte que :

$$tg\,\varphi'' = \frac{k^2 L_2 c_2 - 1}{k\, c_2 r_2}$$ (voir page 110)

et par C, abaissons la perpendiculaire CD sur OD.

OD représentera la f. e. m. effective du deuxième circuit dérivé.

Faisons $OD' = \frac{OD}{r_2}$ et $OA' = \frac{OA}{r_1}$, OA' et OD' représentent les inten-

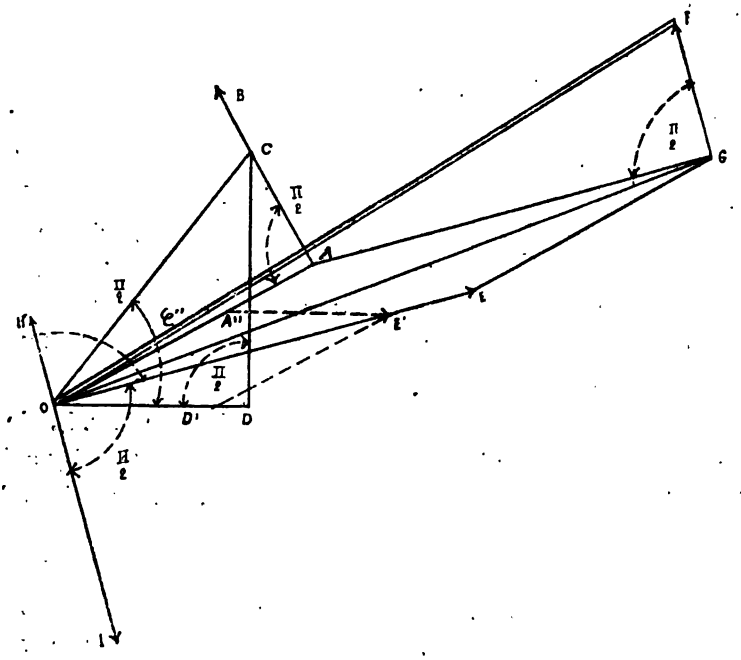


Fig. 29

sités dans les dérivations, la résultante OE' représentera l'intensité dans le circuit principal.

OE = R.OE' représente la f. e. m. effective du circuit principal.

Comme la f. e. m. effective est la résultante :

1° De la f. e. m. appliquée ;

2° De l'inverse de la f. e. m. agissant au bornes de la dérivation ;

3° De la f. e. m. de s. i. ;

4° De la f. e. m. due à la capacité.

La f. e. m. extérieure à appliquer sera la résultante :

1° De la f. e. m. effective représentée par OE ;

2° De la f. e. m. agissant aux bornes de la dérivation, représentée par OC;

3° De l'inverse de la f. e. m. due à la s. i. du circuit principal.

La f. e. m. de s. i. est en retard de 90° par rapport à la f. e. m. effective, sa valeur est kLI; elle sera représentée par OI, perpendiculaire à OE, en prenant $OI = kL.\ OE'$.

4° De l'inverse de la f. e. m. due à la capacité du condensateur intercalé dans le circuit principal.

La f. e. m., due à la capacité, est de 90° en avance sur la f. e. m. effective; sa valeur est $\frac{I}{kc}$; elle sera représentée par OH, perpendiculaire à OE, en faisant :

$$OH = \frac{OE'}{kc}$$

La résultante des deux premières f. e. m. est OG (1); on mènera FG, parallèle à OI, en sens inverse, en faisant :

$$FG = OI - OH$$

OF représentera la f. e. m. extérieure à appliquer.

Si la f. e. m. appliquée était donnée, on construirait le diagramme comme il vient d'être indiqué, en prenant une longueur arbitraire pour OA, on mesurerait ensuite OF et on en déduirait l'échelle de réduction.

Dans le cas où les circuits n'ont pas de capacité, les points B et C, se confondent, et on a :

$$\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{k L_2}{r_2}$$

On peut, au moyen de ce diagramme, retrouver la relation donnée à la page 53, pour le cas des circuits dérivés ayant de la s. i., ce sera une vérification.

Nous avons désigné I_1 par X_1.

Nous avons :

$$OA' = m.\ X_1 \qquad OA = m.\ r_1 X_1$$

$$OE' = m.I$$

(1) Il y a une erreur dans la figure, EG doit être égal et parallèle à OC et non à OA.

Dans le triangle OD'E' nous avons :

$$\overline{OE'}^2 = \overline{OD'}^2 + \overline{D'E'}^2 - \overline{2\,OD'}\ D'E'\cos E'D'O$$

$$E'D'O = AOD = \varphi'' = COA = \varphi'' - \varphi'$$

$$E'D'O = \pi - (\varphi'' - \varphi')$$

$$\overline{OE'}^2 = \overline{OD'}^2 + \overline{D'E'}^2 + 2\,OD'.\ D'E'\cos(\varphi'' - \varphi')$$

$$D'E' = OA'$$

$$\overline{OE'}^2 = \overline{OD'}^2 + \overline{OA'}^2 + 2\,OD'.\ OA'\cos(\varphi'' - \varphi')$$

$$OD' = \frac{OD}{r_2} = \frac{OC.\cos\varphi''}{r_2} = \frac{OA}{\cos\varphi'}\,\frac{\cos\varphi''}{r_2} = \frac{m\,r_1 X_1\cos\varphi''}{r_2\cos\varphi'}$$

$$\overline{OE'}^2 = m^2 I^2 = m^2 X_1^2 + \frac{m^2 r_1^2 X_1^2\cos^2\varphi''}{r_2^2\cos^2\varphi'} + 2\,m^2 X_1^2\,\frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi''}{\cos\varphi'}\cos(\varphi'' - \varphi')$$

$$I^2 = X_1^2\left\{1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\,\frac{\cos^2\varphi''}{\cos^2\varphi'} + 2\,\frac{r_1}{r_2}\cos^2\varphi'' + 2\,\frac{r_1}{r_2}\sin\varphi''\cos\varphi''\,\mathrm{tg}\,\varphi'\right\}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi' = \frac{k\,L_1}{r_1} \qquad \cos^2\varphi' = \frac{r_1^2}{r_1^2 + k^2 L_1^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi'' = \frac{kL^2}{r_2} \qquad \cos^2\varphi'' = \frac{r_2^2}{r_2^2 + k^2 L_2^2} \qquad \sin\varphi''\cos\varphi'' = \frac{k\,L_2 r_2}{r_2^2 + k^2 L_2^2}$$

$$\frac{I^2}{X_1^2} = 1 + \frac{r_1^2 + k^2 L_1^2}{r_2^2 + k^2 L_1^2} + \frac{2\,r r_1}{r_2^2 + k^2 L_2^2} + \frac{k^2\,L_1 L_2}{r_2^2 + k^2\,L_2^2}$$

$$\frac{I^2}{X_1^2} = \frac{(r_1 + r_2)^2 + k^2\,(L_1 + L_2)^2}{r_2^2 + k^2\,L_2^2}$$

On aura donc :

$$X_1^2 = \frac{r_2^2 + k^2\,L_2^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2\,(L_1 + L_2)^2}\,I^2$$

ce qui est bien la relation trouvée page 53.

Le diagramme montre en outre clairement que, quand les circuits dérivés n'ont que de la s. i., le courant dans l'un des circuits dérivés est décalé en avance et l'autre en retard par rapport au courant cirçulant dans le circuit principal (voir page 53).

Condensateur transformateur.

Nous avons indiqué l'emploi du condensateur comme transformateur, page 78 (fig. 18).

Faisons $OA = m.\ r_1\ I_1$, et $OA' = m.\ I_1$ (fig. 30);

Prenons $AB = k\ l\ m\ I_1$, OB représentera la f. e. m. aux bornes du condensateur.

Pour maintenir cette différence de potentiel maximum, $E_c = \frac{OB}{m}$, il faut un courant dont nous désignerons la valeur maximum par I', et on doit avoir :

$$E_c = \frac{I'}{kc} \qquad I' = kc\ E_c \text{ (page 109).}$$

L'intensité de ce courant sera représentée par une droite $OC = kc.\ OB$.

Si $e_a = E_a \sin kt$, représente la f. e. m. appliquée aux bornes du condensateur l'intensité du courant sera :

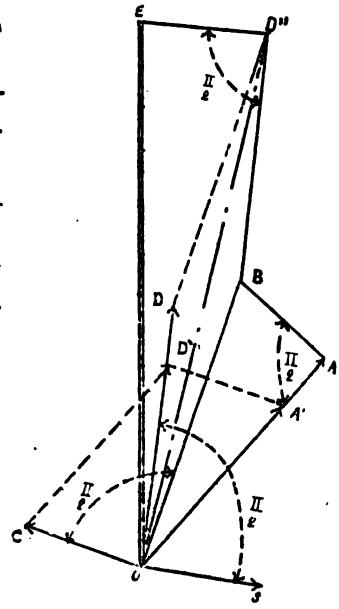


Fig. 30

$$i = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

et on aura :

$$\text{tg}\ \varphi_1 = -\frac{1}{kcr} \quad \text{(page 40)}$$

Comme $r = o$:

$$\text{tg}\ \varphi_1 = -\infty,\ \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}, \qquad i = X_1 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$$

OC sera donc perpendiculaire à OB et en avance de 90°.

Le courant dans le circuit, où agit l'alternateur, sera la résultante du courant de charge de l'accumulateur et du courant circulant dans la dérivation :

L'intensité de ce courant sera donc représentée par OD', résultante de OC et de OA'.

La f. e. m. à appliquer sera la résultante (voir page 112) :

1° De la f.e.m. donnant naissance au courant, (f.e.m. effective) dont

la valeur maximum sera RI, et qui sera représentée par OD, en faisant OD = R.OD';

2° De la différence de potentiel aux bornes du condensateur, représentée par OB,

3° De l'inverse de la f. e. m. due à la s. i..

Si l'on mène BD" parallèle à OD, en faisant BD" = OD ; OD" sera la résultante des deux premières f. e. m.

La f. e. m. de s. i. sera exprimée par $kL\,I$; la longueur de la ligne qui la représente sera $kL\,mI = kL.OD'$.

Cette f. e. m. sera représentée par OS perpendiculaire à OD et retard de 90°.

Par D", nous mènerons une parallèle à OS, nous prendrons D"E = OS, et OE représentera la f. e. m. extérieure à appliquer.

Comme vérification, nous pouvons chercher à retrouver, au moyen du diagramme, la relation donnée à la page 78.

Dans le triangle D'OC, nous avons :

$$\overline{D'O}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CD'}^2 - 2\ OC.\ CD'\cos D'CO$$

$$D'CO = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad CD' = OA'$$

$$\overline{D'O}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OA'}^2 - 2\ CO.\ OA'\sin\varphi$$

$$D'O = m.I \qquad OA' = m.I_1 = m.X_1$$

$$CO = k.c.\ OB = k.c.\frac{OA}{\cos\varphi} = k.c.\ m\ \frac{r\ OA'}{\cos\varphi} = \frac{k.c.\ m.\ r\,X_1}{\cos\varphi}$$

$$\overline{D'O}^2 = m^2I^2 = m^2X_1^2 + \frac{k^2c^2m^2r^2X_1^2}{\cos^2\varphi} - 2\ m^2\,kc.r\,X_1^2.\ \mathrm{tg}\,\varphi$$

$$\frac{I^2}{X_1^2} = 1 + \frac{k^2c^2r^2}{\cos^2\varphi} - 2\ k\,cr.\ \mathrm{tg}\,\varphi$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{kl.\,m\,I_1}{m\,r_1\,I_1} = \frac{kl}{r}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{r^2}{r^2 + k^2\,l^2}$$

$$\frac{I^2}{X_1^2} = 1 + k^2c^2(r^2 + k^2l^2) - 2\ k^2\,c$$

$$\frac{I^2}{X_1^2} = k^2c^2r^2 + k^4c^4l^2 - 2k^2Cl + 1$$

$$\frac{I^2}{X_1^2} = k^2c^2r^2 + (k^2Cl - 1)^2$$

ce qui est bien la relation trouvée page 78.

M. Blakeslay, a indiqué une manière plus élégante de tracer ce diagramme (1).

Représentons par OA, la f. e. m. effective dans la section la plus éloignée de la source (fig. 31).

Prenons dans le sens positif de rotation l'angle AOB = φ, de manière que $tg\varphi = \frac{kl}{r}$ et menons par A la perpendiculaire AB à AO.

Prenons sur le prolongement de BO, le point C de manière à avoir :

$$\frac{BO}{OC} = \frac{r}{R} \qquad OC = BO\,\frac{R}{r}$$

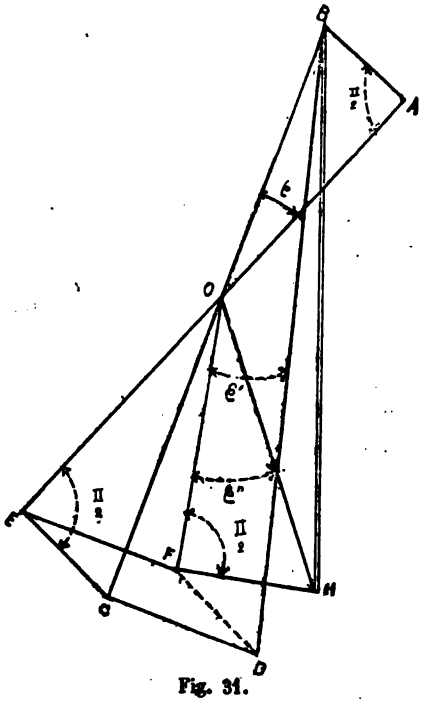


Fig. 31.

Menons la droite BD, qui fait, dans le sens positif de rotation l'angle φ' avec la droite BC, cet angle étant défini par la relation :

$$tg\,\varphi' = \frac{kcrR}{r + R}$$

et menons CD, perpendiculaire à BC.

Du point C, abaissons la perpendiculaire CE sur le prolongement de OA. Prenons la ligne EF égale et parallèle à CD et joignons F à O.

Menons la droite OH, faisant avec OF, dans le sens positif de rotation un angle défini par la relation :

(1) Voir Blakeslay, *les Courants alternatifs d'Electricité*, traduction de M. W. C. Rechniewski, page 59 et suivantes.

$$\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{kL}{R}$$

de F, menons la perpendiculaire FH à OF.

BH représente la f. e. m. extérieure à appliquer au circuit.

En effet, il est facile de voir que OB représente la f. e. m. appliquée au circuit le plus éloigné de la source, c'est-à-dire la différence de potentiel aux bornes du condensateur. On a :

$$CD = BC. \operatorname{tg} \varphi' = BC. \frac{kcr\,R}{r+R}$$

$$BC = BO + OC = BO\left(1 + \frac{R}{r}\right) = \frac{r+R}{r} BO$$

$$CD = kcR.BO$$

CD représente dont la f. e. m. due au condensateur dans le circuit R, et

$$\frac{CD}{R} \text{ ou } \frac{EF}{R}$$

le courant de charge.

$\frac{OA}{r}$ représente l'intensité du courant dans le circuit dérivé, et comme les triangles BAO et OEC sont semblables, on a :

$$OE = OA\,\frac{r}{R} = \frac{I_1}{R}$$

OF, qui est la résultante de OE et de OF, représente donc la f. e. m. effective dans le circuit où agit la source d'électricité.

Puisque $tg\varphi'' = \frac{kL}{R}$, FH représente la f. e. m. de s. i, dans cette section.

BH, résultante de BO, de OF et FH, représente donc bien la f. e. m. extérieure à appliquer au circuit.

Cas où l'un des circuits dérivés, a de la s. i., sans résistance.— Ce cas, indiqué sur le schéma de la figure 32, peut se traiter d'une manière analogue à celui du condensateur transformateur.

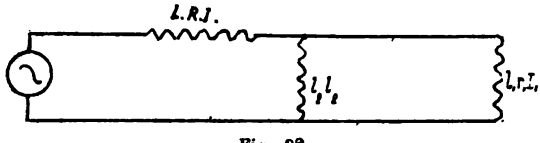


Fig. 32

Représentons par OA, (fig. 33) la f. e. m. effective dans la première dérivation.

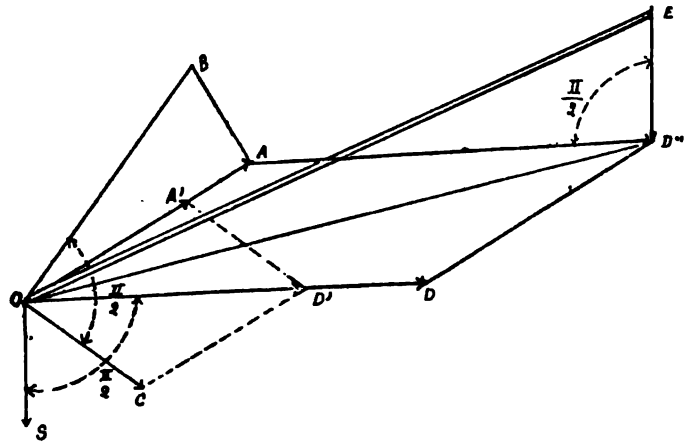


Fig. 33

Nous aurons :

$$OA = m\, r_1\, I_1$$

Nous prendrons :

$$AB = \frac{l_1}{r_1}\, OA = m\, k\, l_1\, I_1$$

OB représentera la f. e. m. aux bornes de la dérivation, qui sera la f. e. m. nécessaire pour vaincre la s. i. de la deuxième dérivation.

On aura dans cette dérivation :

$$\frac{OB}{m} = E_s = k\, l_2\, I_2 \text{ (voir page 107).}$$

en prenant $OC = \frac{OB}{k\, l_2}$, OC représentera I_2.

OC doit être en retard de 90° par rapport à OB, en effet, si la f. e. m. extérieure est représentée par :

$$e_a = E_a \sin kt$$

Le courant sera : $i = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{kL_2}{r_1} = \infty, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \text{ car } r_1 = o \text{ (page 31)}$$

Nous aurons donc :

$$i = X_1 \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right)$$

Si on prend $OA' = \frac{OA}{r_1}$; OD' résultante de OC et de OA' représente l'intensité du courant dans le circuit principal. $OD = R.OD'$ représentera la f. e. m. effective du circuit principal.

La f. e. m. appliquée à ce circuit sera la résultante des trois f. e. m.

1° La f. e. m. effective OD ;

2° La f. m. agissant aux bornes de la dérivation, représentée par OB ;

3° Une f. e. m. inverse de celle de la s. i. dans le circuit.

La f. e. m. de s. i. dans le circuit, fait un angle de 90° avec OD qui représente la f. e. m. dans le circuit et on a :

$$OS = k.L.\ OD'$$

OD'' est la résultante des deux premières f.e.m. (1) on tracera D''E, égale et parallèle à OS et la f. e. m. extérieure sera représentée par OE.

Induction mutuelle. — Soient L_1 et r_1, les constantes du circuit primaire L_2 et r_2 celles du circuit secondaire, M le coefficient d'induction mutuelle.

Cherchons quelle doit être la f. e. m. extérieure à appliquer au circuit primaire pour que l'intensité maximum dans le circuit secondaire ait la valeur donnée I_2.

Prenons :

$$OA' = m\, I_2 \qquad OA = m\, r_2 I_2 \text{ (fig. 34)}$$

Menons AB perpendiculaire à OA, $AB = kl_2.OA'$.

OB représente la f. e. m. appliquée au circuit secondaire.

(1) La droite DD'' doit être égale et parallèle à OB et non à OA, comme il est indiqué sur la figure.

Dans le circuit primaire, on a :

$$i_1 = I_1 \sin kt$$

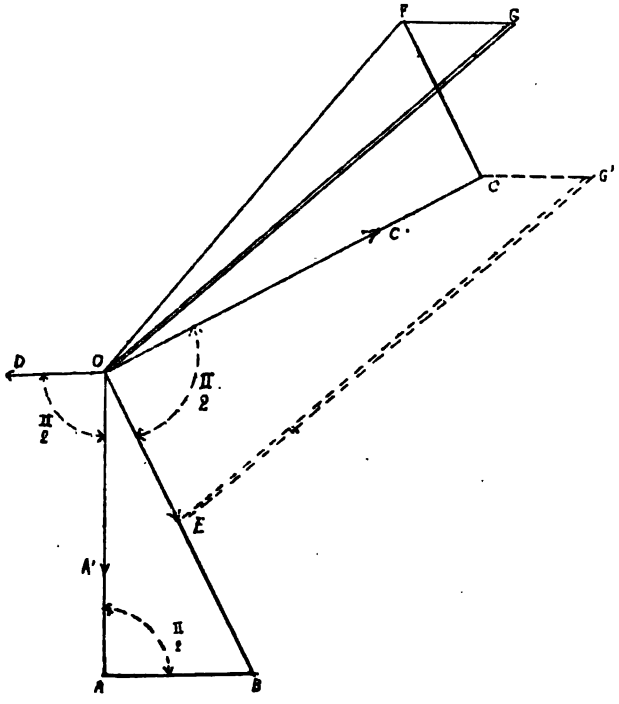


Fig. 34

La f. e. m. appliquée au circuit secondaire sera :

$$e_{a_2} = k\,M\,I_1 \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_1 = \frac{E_{a_2}}{k\,M}$$

I_1 sera représenté par une droite $OC' = \frac{mE_{a_2}}{kM} = \frac{OB}{kM}$ en avance de 90° par rapport à OB.

Si on prend $OC = r_1 OC'$, OC représente la f.e.m. effective du circuit primaire.

La f.e.m. de s.i. du circuit primaire est kL_1I_1 et est en retard de 90° par rapport à OC, elle est représentée par OE.

$$OE = mk\ L_1 I_1 = m.L_1 \frac{E_{02}}{M} = \frac{L_1}{M}\ OB$$

La f. e. m. extérieure de ce circuit sera représentée par OF, résultante de OC et de — OE. Cette f. e. m. est la résultante de deux autres, la f. e. m. appliquée et la f. m. due à l'induction du circuit secondaire.

Cette dernière force sera représentée par OD, en retard de 90° par rapport à OA.

$$OD = mk\,MI_2 = k\,MOA'$$

La f. e. m. appliquée sera donc représentée par OG, résultante de OF et de — OD.

On peut simplifier la construction, en menant par C, une ligne CG', égale et parallèle à OD ; il est facile de voir que EG' représente la f. e. m. à appliquer au circuit primaire.

Si au lieu de I_2, on avait comme donnée, une des autres quantités (I_1 ou la f. e. m. appliquée), on construirait le diagramme, en prenant une longueur arbitraire pour OA', l'échelle serait ensuite déterminée en mesurant sur la figure la longueur représentant la quantité donnée.

§ 13. — CAPACITÉ RÉPARTIE LE LONG D'UN CONDUCTEUR.

Quand un conducteur a de la capacité répartie en divers points, la valeur instantanée de l'intensité n'est par la même en tous ces points. Le potentiel varie continuellement, par suite de l'augmentation ou de la diminution de la quantité d'électricité amenée ou enlevée par le courant.

Les phases du potentiel et du courant varient donc suivant les parties du circuit que l'on considère.

Dans le cas où la capacité est uniformément répartie le long d'un conducteur de résistance constante, les équations différentielles donnant les valeurs instantanées de l'intensité du courant et du potentiel aux divers points, peuvent être établies comme il suit.

Soient :

c et ρ, la capacité et la résistance du circuit par unité de longueur;

e' la différence de potentiel, et i l'intensité du courant en un point donné du circuit;

$e' + de'$ et $e' + di$ les valeurs correspondantes en un point situé à la distance dx, du premier point.

L'élément compris entre les deux points a une capacité cdx et une résistance ρdx.

La f. e. m. entre les deux points sera $e' - (e' + de') = - de'$; l'intensité du courant étant i, on aura, en appliquant la loi de Ohm :

$$i = - \frac{de'}{\rho dx}$$

ou :

$$\frac{de'}{dx} = - \rho i \qquad (1)$$

La quantité d'électricité qui sort de l'élément pendant le temps dt, est $(i + di - i)\, dt = di\, dt$; on aura :

$$c\, dx\, de' = - di\, dt$$

$$\frac{di}{dx} = - c \frac{de'}{dt} \qquad (2)$$

En prenant la dérivée des deux termes de l'équation 1, par rapport à x, on aura :

$$\frac{d^2 e'}{dx^2} = - \rho \frac{di}{dx} \qquad 3)$$

En combinant cette équation avec (2), on aura :

$$\frac{d^2 e'}{dx^2} = \rho c \frac{de'}{dt} \qquad (4)$$

équation aux dérivées partielles.

M. Blakeslay (1) a résolu l'équation, pour le cas d'un conducteur de longueur infinie, soumis à une f. e. m. appliquée E sin $\frac{2\pi t}{T}$; les équations sont :

$$e' = E\, e^{-\sqrt{\frac{\rho c \pi}{T}}} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \sqrt{\frac{\rho c T}{4\pi}}\, x\right)$$

$$i = E \sqrt{\frac{2 c \pi}{T \rho}}\, e^{-\sqrt{\frac{\rho c \pi}{T}}\, x} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \sqrt{\frac{\rho c T}{4\pi}}\, x + \frac{T}{8}\right)$$

Pour démontrer l'exactitude de ces formules, il suffit de prouver qu'elles satisfont aux équations 1 et 2, et que pour :

$$x = o$$

on a :

$$e' = E \sin \frac{2\pi}{T}\, t$$

M. Blakeslay en tire les conclusions suivantes :

1° En chaque point du conducteur, la phase du courant, précède celle du potentiel d'un huitième de période;

Les phases du potentiel, aussi bien que celles du courant, sont de plus en plus retardées à mesure que l'on s'éloigne de l'origine (c'est-à-dire que x augmente).

Il y a donc sur le conducteur une série de points équidistants, qui se trouvent dans la même phase à chaque instant.

La distance de ces points de même phase est :

$$2.\sqrt{\frac{\pi T}{c\rho}}$$

elle peut être appelée la *longueur d'onde de l'ondulation.*

3° Bien que la résistance d'un conducteur infini soit infinie, il peut exister un courant considérable d'électricité en chaque point, si il y a de la capacité distribuée le long du conducteur.

(1) *Les Courants alternatifs d'Électricité*, pur Th. Blakeslay, traduction de M. W.-C. Rechniewski, page 76 et suivantes.

M. Blakeslay examine ensuite les deux cas suivants, où le conducteur n'a pas une longueur infinie :

1° Lorsque l'extrémité du conducteur est mise à la terre, c'est-à-dire maintenue au potentiel zéro ;

2° Lorsque l'extrémité du circuit est parfaitement isolée, et que, par conséquent, le courant à cette extrémité est toujours égal à zéro.

Pour le premier cas, M. Blakeslay suppose que le conducteur a encore une longueur infinie, et, qu'en un point placé à une distance $2\,l$ du zéro, une autre f. e. m. extérieure est appliquée, dont la valeur maximum et la période sont E et T, mais dont la phase est exactement contraire à celle de la f. e. m. extérieure appliquée au point O, c'est-à-dire en somme une f. e. m. :

$$-\,E \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Le potentiel d'un point placé à une distance l de l'origine sera évidemment toujours égal à zéro. M. Blakeslay appelle le potentiel et le courant, dus à la deuxième source, *potentiel et courants réfléchis.*

En posant $\sqrt{\frac{\rho c \pi}{T}} = \alpha$, le potentiel, en un point quelconque, est donné par la relation :

$$e' = E\,e^{-\alpha x}\left\{1 + e^{-4\alpha(l-x)} - 2\,e^{-2\alpha(l-x)} \cos 2\alpha(l-x)\right\}^{1/2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \sin\left\{\frac{2\pi t}{T} - \alpha x + y\right\}$$

dans laquelle :

$$\operatorname{tg} y = \frac{e^{-2\alpha(l-x)} \sin 2\alpha(l-x)}{1 - e^{-2\alpha(l-x)} \cos 2\alpha(l-x}$$

L'intensité du courant, en un point quelconque, est donnée par la relation ;

$$i = E\sqrt{\frac{2c\pi}{T\rho}}\, e^{-\alpha x}\left\{1 + e^{-4\alpha(l-x)} + 2\,e^{2\alpha(l-x)} \cos 2\alpha(l-x)\right\}^{1/2}$$

M. Blakeslay (1) a résolu l'équation, pour le cas d'un conducteur de longueur infinie, soumis à une f. e. m. appliquée $E \sin \frac{2\pi t}{T}$; les équations sont :

$$e' = E\, e^{-\sqrt{\frac{\rho c \pi}{T}}} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \sqrt{\frac{\rho c T}{4\pi}}\, x\right)$$

$$i = E \sqrt{\frac{2 c \pi}{T \rho}}\, e^{-\sqrt{\frac{\rho c \pi}{T}}\, x} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t - \sqrt{\frac{\rho c T}{4\pi}}\, x + \frac{T}{8}\right)$$

Pour démontrer l'exactitude de ces formules, il suffit de prouver qu'elles satisfont aux équations 1 et 2, et que pour :

$$x = o$$

on a :

$$e' = E \sin \frac{2\pi}{T}\, t$$

M. Blakeslay en tire les conclusions suivantes :

1° En chaque point du conducteur, la phase du courant, précède celle du potentiel d'un huitième de période;

Les phases du potentiel, aussi bien que celles du courant, sont de plus en plus retardées à mesure que l'on s'éloigne de l'origine (c'est-à-dire que x augmente).

Il y a donc sur le conducteur une série de points équidistants, qui se trouvent dans la même phase à chaque instant.

La distance de ces points de même phase est :

$$2.\sqrt{\frac{\pi T}{c\rho}}$$

elle peut être appelée la *longueur d'onde de l'ondulation*.

3° Bien que la résistance d'un conducteur infini soit infinie, il peut exister un courant considérable d'électricité en ch[illegible] de la capacité distribuée le long du conducteu[illegible]

(1) *Les Courants alternatifs d'Électricité*, par [illegible] Rechniewski, page 76 et suivantes.

M. Blakeslay examine [illegible] teur n'a pas une longueur [illegible].

1° Lorsque l'extrémité [illegible] dire maintenue au potentiel [illegible] :

2° Lorsque l'extrémité du [illegible] par conséquent, le courant a [illegible] zéro.

Pour le premier cas, M. [illegible] encore une longueur [illegible] $2\,l$ du zéro, une autre [illegible] leur maximum et la [illegible] exactement contraire a [illegible] point O, c'est-à-dire [illegible]

$$-E \sin \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

Le potentiel d'un [illegible] demment toujours égal à [illegible] courant, dus à la [illegible]

En posant $\sqrt{\frac{\rho c x}{T}} = \alpha$ [illegible] donné par la relation :

$$e' = E e^{-\alpha x} (1 + e^{-[illegible]} [illegible]$$

$$\sqrt{\frac{[illegible]}{[illegible]}} \sin \frac{[illegible]}{[illegible]} [illegible]$$

dans laquelle :

[illegible] alternatifs sur les [illegible] les souterrains, on [illegible] teurs, isolés l'un de [illegible] ure.

L'in[illegible] urs sont concentriques [illegible] capacités :

$$\left\{\sin\frac{2\pi t}{T} - \alpha x + \frac{\pi}{4} - z\right\}$$

dans laquelle :

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{-2\alpha(l-x)} \sin 2\alpha(l-x)}{1 + e^{-2\alpha(l-x)} \cos 2\alpha(l-x)}$$

La phase du potentiel dans le conducteur de longueur finie, dont une des extrémités est mise à la terre, est donc avancée par rapport à celle du potentiel du conducteur de longueur infinie.

La phase du courant dans le conducteur de longueur finie est retardée par rapport à celle du point correspondant du conducteur de longueur infinie.

Pour ramener au cas du conducteur de longueur infinie, le cas du conducteur fini dont l'extrémité est isolée, M. Blakeslay procède comme dans l'exemple précédent, en admettant que la f. e. m., qui donne naissance au potentiel et au courant réfléchi, est égale à celle de la source primaire, de sorte que les courants se neutralisent au centre du circuit.

En prenant encore $\alpha = \sqrt{\frac{\rho c \pi}{T}}$, l'expression du potentiel en un point est :

$$e' = E e^{-\alpha x}\left\{1 + e^{-4\alpha(l-x)} + 2e^{-2\alpha(l-x)} \cos 2\alpha(l-x)\right\}^{1/2}$$

$$\sin\left\{\frac{2\pi t}{T} - \alpha x - y\right\}$$

avec :

$$\operatorname{tg} y = \frac{e^{-2\alpha(l-x)} \sin 2\alpha(l-x)}{1 + e^{-2\alpha(l-x)} \cos 2\alpha(l-x)}$$

L'expression de l'intensité du courant est :

$$i = E\sqrt{\frac{2c\pi}{T\rho}} e^{-\alpha x}\left\{1 + e^{-4\alpha(l-x)} - 2e^{-2\alpha(l-x)} \cos 2\alpha(l-x)\right\}^{1/2}$$

$$\left\{\sin\frac{2\pi t}{T} - \alpha x + \frac{\pi}{4} + z\right\}$$

avec :

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{-2\alpha(l-x)} \sin 2\alpha (l-x)}{1 - e^{-2\alpha(l-x)} \cos 2\alpha (l-x)}$$

Dans le conducteur de longueur finie, dont l'extrémité est isolée, la phase du potentiel est retardée par rapport à celle du point correspondant du conducteur de longueur finie, tandis que la phase du courant est par contre avancée par rapport à celle du point correspondant du conducteur de longueur infinie.

Les câbles à un conducteur, avec armature extérieure (fig. 35), présentent le cas d'un circuit avec capacité uniformémeut répartie.

La capacité par unité de longueur (centimètre), d'un tel câble, est donnée par la relation :

$$c = \frac{K}{2 \operatorname{Log}_n \frac{r_2}{r_1}}$$

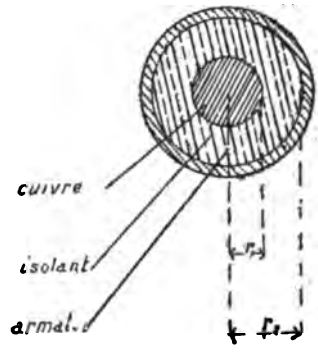


Fig. 35,

en unités électrostiques, K étant la capacité spécifique de l'isolant par rapport à à l'air.

La capacité par centimètre de longueur, en farads est :

$$c = \frac{K}{18 \times 10^{11} \operatorname{Log}_n \frac{r_2}{r_1}}$$

et en microfarads :

$$c = \frac{K}{18 \times 10^{5} \operatorname{Log}_n \frac{r_2}{r_1}}$$

Par suite de l'action perturbatrice des courants alternatifs sur les téléphones, et aussi pour faciliter la pose des câbles souterrains, on a été amené à former ceux-ci de deux conducteurs, isolés l'un de l'autre, et protégés par une armature extérieure.

Quand, dans de tels câbles, les conducteurs sont concentriques (fig. 35 *bis*), ils présentent deux sortes de capacités :

La capacité entre les deux conducteurs, et la capacité entre le conducteur extérieur et l'armature.

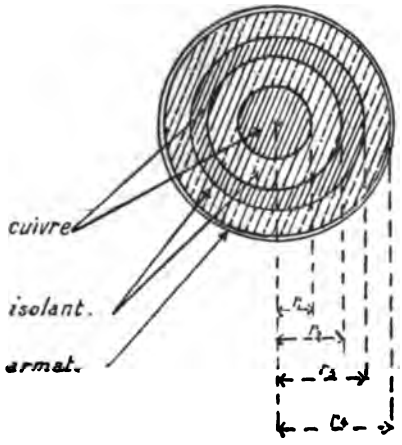


Fig. 35 *bis*.

Dans ce cas, la solution du problème de la capacité, uniformément répartie, devient très difficile, mais on peut avoir une idée des phénomènes qui se produisent, en admettant que les capacités sont concentrées en des points déterminés. On peut alors assimiler le câble à un circuit dans lequel est intercalé un condensateur transformateur (fig. 18, p. 78).

Le câble forme le circuit le plus rapproché de la source; sa résistance est R., la s. i. dans cette partie est L (ordinairement celle de l'alternateur); la capacité c' du condensateur, intercalée dans ce circuit, est égale à la capacité du câble entre l'armature et le conducteur extérieur, si l' est la longueur du câble, K étant la capacité spécifique de l'isolant.

On a :

$$c' = \frac{K l'}{18 \times 10^5 \operatorname{Log}_n \frac{r_1}{r_3}}$$

Il faut donc remplacer dans les formules L par :

$$\lambda = L - \frac{1}{k^2 c'}$$

La capacité c du condensateur transformateur est égale à la capacité totale du câble entre les deux conducteurs.

On a :

$$c = \frac{K' l'}{18 \times 10^5 \operatorname{Log}_n \frac{r_2}{r_4}}$$

La résistance et la s. i. du circuit, à partir du câble, sont r et l.

Si I est la valeur de l'intensité maximum du courant dans le câble, X_1 celle du courant en dehors du câble, on a (page 78) :

$$\frac{I^2}{X_1^2} = k^2c^2r^2 + (k^2cl - 1)$$

Si E_a est la valeur maximum de la f. e. m. de la source et Σ, la différence de potentiel maximum à l'extrémité du câble, on a (page 82) :

$$\frac{E_a^2}{\Sigma^2} = (1 - k^2c\lambda)^2 + k^2c^2R^2 + \frac{(R^2 + k^2\lambda^2)(1 - 2k^2cl) + 2k^2\lambda l + 2Rr}{r^2 + k^2l^2}$$

Quand le circuit est coupé à l'extrémité du câble, on a :

$$\Sigma = \frac{E_a}{\sqrt{(1 - k^2c\lambda)^2 + k^2c^2R^2}}$$

Nous verrons, dans l'étude des canalisations, diverses applications de ces formules.

CHAPITRE III.

Des alternateurs.

§ 1er. — THÉORIE DES ALTERNATEURS

On peut classer les machines dynamos à courants alternatifs :

1° D'après la forme de l'induit, en :

a) Machines *à tambour ;*

b) Machines *à anneau ;*

c) Machines *à disque.*

2° D'après le mode d'excitation des inducteurs, en :

a) Machines *magnéto-électriques* dans lesquelles les inducteurs sont constitués par des aimants permanents ;

b) Machines à *excitation indépendante.* Les inducteurs sont constitués par des électro-aimants, excités par le courant fourni par une dynamo auxiliaire à courant continu que l'on appelle l'excitatrice.

c) Machines *auto-excitatrices.* Le courant d'excitation des électro-aimants constituant les inducteurs, est obtenu en redressant une partie du courant produit dans l'induit. La s. i. des bobines atténue dans ce cas, les ondulations du courant redressé.

Quand la f. e. m. du courant produit par l'alternateur est très élevée, il n'est pas avantageux au point de vue de l'isolement de dériver directement dans les bobines des inducteurs, le courant redressé. On redresse alors le plus ordinairement, le courant secondaire, à basse tension, d'un transformateur dont le circuit primaire est parcouru par une dérivation du courant principal.

Alternateur à tambour (fig. 36). — Considérons le cas d'une spire tournant autour d'un axe médian avec une vitesse angulaire uniforme k, dans un champ magnétique uniforme.

Soit S la surface de la spire et Φ le nombre de lignes de force par unité de surface du champ magnétique.

Quand la spire occupe la position OA, le flux de force qui la traverse est $S\Phi$, quand elle occupe, la position OA' le flux de force est :

$$\Phi' = S\,\Phi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = S\,\Phi \cos\alpha$$

La f. e. m. développée, sera :

$$e = -\frac{d\Phi'}{dt} = S\,\Phi \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Mais si k est la vitesse angulaire de la spire et si t est le temps écoulé pour la rotation de l'angle α, on a :

$$\alpha = kt$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = k$$

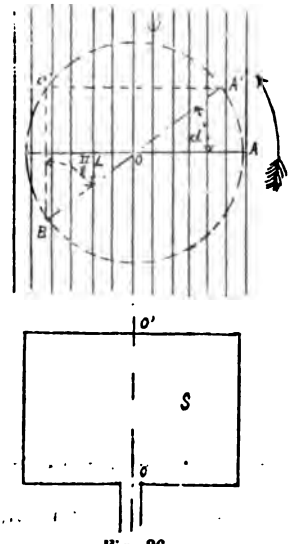


Fig. 36.

on aura donc :

$$e = k\,S\,\Phi \sin kt$$

On voit par là, que le courant produit est un courant alternatif simple.

Lors de l'emploi des courants alternatifs pour l'éclairage, par exemple, il faut que k, atteigne une certaine valeur (correspondant au moins à 40 périodes à la seconde), afin que l'éclat des lampes soit régulier. Si on formait l'induit d'une seule bobine, on serait obligé de lui donner une vitesse excessive, très difficile à atteindre.

Pour cette raison, on forme l'induit d'un certain nombre de bobines distinctes, qui passent successivement dans des séries de champs magnétiques, alternativement de signes contraires.

Dans le cas d'un *induit annulaire*, les pôles inducteurs, au nombre de 2M, sont placés radialement soit à l'extérieur (comme l'indique la figure 37), soit à l'intérieur de l'induit. Ces pôles sont alternés et l'angle compris entre les axes de deux pôles consécutifs est $\frac{\pi}{M}$.

En constituant l'induit d'une série ds bobines telles que A, C. E. dont les axes comprennent entre eux des angles égaux a $\frac{2\pi}{M}$, on voit

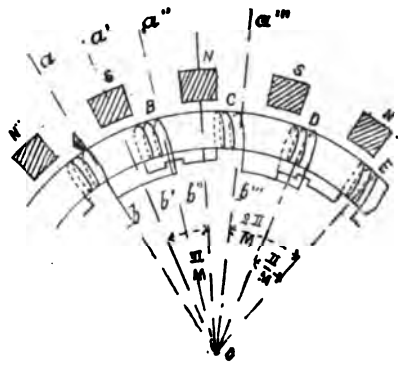


Fig. 37.

que à chaque instant ces bobines occupent des positious semblables dans les divers champs magnétiques. On peut donc les coupler, soit en tension, si on veut obtenir une force électromotrice considérable, soit en quantité, soit encore en réunir en série un certain nombre et mettre ces ensembles en quantité.

On peut aussi placer les bobines de sorte que leurs axes fassent entre eux des angles égaux à $\frac{\pi}{M}$, mais, dans ce cas, on voit facilement qu'il faut inverser l'enroulement d'une bobine sur deux et les réunir, par exemple, comme l'indique la figure 37.

Quand l'induit est fixe, on forme ainsi un circuit dont les deux extrémités sont reliées directement à celles du circuit extérieur.

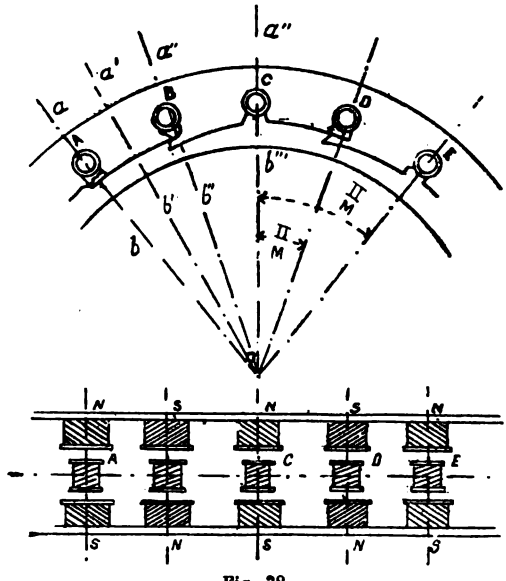


Fig. 38.

Quand l'induit est mobile, on recueille le courant au moyen de deux bagues isolées entre elles, sur chacune desquelles appuie un balai, relié à une des extrémités du circuit extérieur.

Dans le cas d'un *induit à disque*, les pôles sont placés latéralement de part et d'autre et les champs sont alternés (fig. 38).

Si le nombre des champs est 2M, l'angle compris entre les axes de deux champs consécutifs est $\frac{\pi}{M}$ et celui compris entre deux champs consécutifs de même signe est $\frac{2\pi}{M}$.

En plaçant sur l'induit des bobines telles que A, C, E, comprenant entre elles des angles égaux à $\frac{2\pi}{M}$, ces bobines se trouveront toutes au même instant dans des positions semblables par rapport aux champs magnétiques et pourront être réunies en tension ou en quantité.

On pourra également placer des bobines intermédiaires telles que B et D, mais alors il faudra avoir soin de les enrouler en sens inverse des bobines A, C, E, comme l'indique la figure.

Considérons dans un alternateur à anneau ou dans un alternateur à disque, la bobine A au moment où son axe coïncide avec la ligne *ab* (fig. 37 et 38). Si Φ est le nombre de lignes de force du champ par unité de surface et S la surface de l'ensemble des spires de la bobine, le flux de force qui traverse cette dernière sera $S\Phi$.

Quand l'axe de la bobine coïncidera avec la ligne *a'b'*, le flux sera nul; quand il coïncidera avec la ligne *a"b"* le flux sera $-S\Phi$.

La variation du flux sera donc $2\,S\,\Phi$.

Si t_1 est la durée du déplacement angulaire (pour un angle égal à $\frac{\pi}{M}$), le f. e. m. induite moyenne sera :

$$\frac{2\,S\,\Phi}{t_1}$$

La f. e. m. sera évidemment nulle quand l'axe de la bobine coïncidera, soit avec *ab*, soit avec *a"b"*. Cette f. e. m. sera maximum quand l'axe coïncidera avec *a'b'*.

De *a"b"* à *a"'b"'* les mêmes phénomènes se reproduiront en sens inverse et la f. e. m. induite moyenne sera encore:

$$\frac{2\,S\,\Phi}{t_1}$$

M. Joubert a démontré et a vérifié expérimentalement, que dans le cas où l'induit ne contient pas de fer, la f. e. m. induite est une fonction périodique simple, sa valeur instantanée peut donc être exprimée par la relation :

$$e = E_a \sin kt = E_a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

en désignant par T la durée d'une période complète.

Si 2M est le nombre de champs magnétiques d'un alternateur et N le nombre de tours par minute, on aura :

$$T = \frac{60}{MN}$$

d'où :

$$k = \frac{2\pi MN}{60}$$

Nous avons vu que la f. e. m. moyenne induite dans une bobine est $\frac{2SH}{t_1}$, t_1 étant la durée d'une demi-période :

$$t_1 = \frac{T}{2}$$

cette f. e. m. moyenne est donc :

$$\frac{4 S \Phi}{T}$$

Si la valeur instantanée est :

$$e = E_a \sin kt$$

la valeur moyenne est :

$$\frac{2 E_a}{\pi}$$ (page 18)

nous aurons donc :

$$\frac{2E_a}{\pi} = \frac{4\ S\ \Phi}{T}$$

$$E_a = \frac{2\ \pi\ S\ \Phi}{T} = \frac{2\pi\ S\ \Phi\ MN}{60}$$

La valeur instantanée de la f. e. m. développée *dans une bobine* sera donc :

$$e = \frac{2\pi S\Phi MN}{60} \sin \frac{2\pi MN}{60}\ t = k\ S\ \Phi \sin kt$$

même équation que dans le cas de l'alternateur à tambour, mais avec la différence que k n'est plus la vitesse angulaire de la machine mais bien le produit de cette vitesse angulaire $\left(\frac{2\pi N}{60}\right)$ par la moitié du nombre des champs magnétiques.

On peut donner une autre forme à cette équation, S étant la surface de l'ensemble des spires de la bobine, si on désigne par n_1 le nombre des spires et par s leur surface unitaire ; on a :

$$S = n_1 s.$$

on aura pour une bobine :

$$e = k\ n_1\ s\ \Phi \sin kt$$

si on a m_1 bobines en tension, on aura comme valeur instantanée de la f. e. m. :

$$e = k\ m_1\ n_1\ s\ \Phi \sin kt$$

Si toutes les bobines, ce qui arrive le plus ordinairement sont en tension, $m_1\ n_1$ représentera le nombre n de spires de l'induit et on aura :

$$e = k\ n\ s\ \Phi \sin kt$$

$$E_a = k\, n\, s\, \Phi$$

$$E_{efficace} = \frac{k\, n\, s\, \Phi}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi MN}{60}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\, n\, s\, \Phi$$

Si l'on trace la courbe des valeurs instantanées de *ei*, c'est-à-dire la courbe représentant à chaque instant le travail d'un moteur actionnant un alternateur (déduction faite des pertes) elle affecte la forme représentée en pointillé sur la figure 39. Pendant un certain intervalle de temps, le travail est négatif, c'est-à-dire que l'alter-

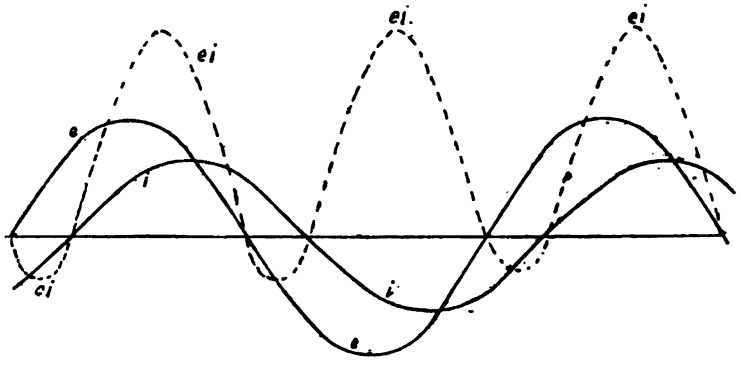


Fig. 39.

nateur restitue alors du travail. Le rapport du travail positif (fourni par le moteur) au travail négatif (restitué par l'alternateur) dépend évidemment du coefficient de s. i., c'est-à-dire de l'angle de retard φ.

Si $L = o$, $\varphi = o$, ce rapport est infini, c'est-à-dire que la courbe est toute entière au-dessus de l'axe des x et que l'alternateur ne restitue aucun travail. Si $L = \infty$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, le rapport est égal à un, la puissance moyenne est nulle, en effet, on a alors :

$$T_m = E_{eff}\, I_{eff} \cos \varphi = o$$

On peut attribuer à cette cause les vibrations et les ronflements des alternateurs, vibrations qui, comme on le sait, sont beaucoup plus fortes dans un alternateur dont les bobines de l'induit ont des noyaux en fer, car dans ce cas, la s. i. est très considérable.

Pour un alternateur fournissant des courants polyphasés, il n'en est pas ainsi, la valeur instantanée du travail est constante, si naturellement tous les circuits ont même résistance et même coefficient de s. i.

Comme nous le verrons plus loin, on peut diviser les courants polyphasés en deux catégories, dans l'une, on a n courants décalés de $\frac{\pi}{n}$ de l'un à l'autre, dans l'autre, les courants sont décalés de $\frac{2\pi}{n}$, d'un circuit à l'autre.

Pour les courants de la 1re catégorie, les f. e. m. seront :

$$e_1 = \mathrm{E} \sin kt.$$

. . . . .

$$e_l = \mathrm{E} \sin \left(kt + \frac{l-1}{n} \pi \right)$$

. . . . .

$$e_n = \mathrm{E} \sin \left(kt + \frac{n-1}{n} \pi \right)$$

Si r et L sont respectivement, la résistance et le coefficient de s. i. de chacun des circuits, en posant $\mathrm{tg}\, \varphi = \frac{k\,\mathrm{L}}{r}$, les intensités des courants seront à chaque instant :

$$i_1 = \frac{\mathrm{E}}{r} \cos \varphi \sin (kt - \varphi)$$

. . . . .

$$i_l = \frac{\mathrm{E}}{r} \cos \varphi \sin \left(kt + \frac{l-1}{n} \pi - \varphi \right)$$

. . . . .

$$i_n = \frac{\mathrm{E}}{r} \cos \varphi \sin \left(kt + \frac{n-1}{n} \pi - \varphi \right)$$

Le travail total sera à l'instant t :

$$T = e_1 i_1 + \ldots + e_l i_l + \ldots e_n i_n = \frac{E^2}{r} \cos \varphi \Big\{ \sin kt \sin (kt - \varphi) + \ldots$$

$$+ \ldots \sin \left(kt + \frac{l-1}{n} \pi \right) \sin \left(kt + \frac{l-1}{n} \pi - \varphi \right) + \ldots$$

$$+ \sin \left(kt + \frac{n-1}{n} \pi \right) \sin \left(kt + \frac{n-1}{n} \pi - \varphi \right) \Big\}$$

comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \Big\{ \cos (a - b) - \cos (a + b) \Big\}$$

on aura :

$$T = \frac{E^2}{2r} \cos \varphi \Big\{ \cos \varphi - \cos (2kt - \varphi) + \ldots + \cos \varphi + \cos \left(2kt + \frac{2(l-1)}{n} \pi - \varphi \right) + \ldots$$

$$+ \cos \varphi - \cos \left(2kt + \frac{2(n-1)}{n} \pi - \varphi \right) \Big\}$$

Comme la somme des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, est égale à zéro (page 21). on aura finalement :

$$T = \frac{n E^2}{2r} \cos^2 \varphi = \text{constante.}$$

Pour les courants de la 2e catégorie. les f. e. m. seront :

$$e_1 = E \sin kt$$

. . . . .

$$e_l = E \sin \left(kt + \frac{2(l-1)}{n} \pi \right)$$

. . . . .

$$e_n = E \sin \left(kt + \frac{2(n-1)}{n} \pi \right)$$

en posant $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k\,L}{r}$, on aura :

$$i_1 = \frac{E}{r}\cos\varphi \sin(kt - \varphi)$$

. . . . .

$$i_l = \frac{E}{r}\cos\varphi \sin\left(kt + \frac{2(l-1)}{n}\pi - \varphi\right)$$

. . . . .

$$i_n = \frac{E}{r}\cos\varphi \sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi - \varphi\right)$$

Le travail total sera à l'instant t :

$$T = e_1 i_1 + \ldots + e_l i_l + \ldots + e_n i_n = \frac{E^2}{2r}\cos\varphi \left\{ \sin kt \sin(kt - \varphi) + \ldots \right.$$

$$+ \sin\left(kt + \frac{2(l-1)}{n}\pi\right)\sin\left(kt + \frac{2(l-1)}{n}\pi - \varphi\right) + \ldots$$

$$\left. + \sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi - \varphi\right) \right.$$

comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left\{\cos(a - b) - \cos(a + b)\right\}$$

on aura :

$$T = \frac{E^2}{2r}\cos\varphi \left\{\cos\varphi - \cos(2kt - \varphi) + \ldots + \cos\varphi - \cos\left(2kt + \frac{4(l-1)}{n}\pi - \varphi\right) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \cos\varphi - \cos\left(2kt + \frac{4(n-1)}{n}\pi - \varphi\right) \right\}$$

Comme la somme des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{4\pi}{n}$ est égal à zéro (page 22), on aura finalement :

$$T = \frac{n\,E^2}{2r}\cos^2\varphi = \text{constante}$$

$$T = e_1 i_1 + \ldots + e_l i_l + \ldots e_n i_n = \frac{E^2}{r} \cos\varphi \Big\{ \sin kt \sin(kt - \varphi) + \ldots$$

$$+ \ldots \sin\left(kt + \frac{l-1}{n}\pi\right) \sin\left(kt + \frac{l-1}{n}\pi - \varphi\right) + \ldots$$

$$+ \sin\left(kt + \frac{n-1}{n}\pi\right) \sin\left(kt + \frac{n-1}{n}\pi - \varphi\right) \Big\}$$

comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \Big\{ \cos(a - b) - \cos(a + b) \Big\}$$

on aura :

$$T = \frac{E^2}{2r} \cos\varphi \Big\{ \cos\varphi - \cos(2kt - \varphi) + \ldots + \cos\varphi + \cos\left(2kt + \frac{2(l-1)}{n}\pi - \varphi\right) + \ldots$$

$$+ \cos\varphi - \cos\left(2kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi - \varphi\right) \Big\}$$

Comme la somme des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, est égale à zéro (page 21). on aura finalement :

$$T = \frac{n E^2}{2r} \cos^2\varphi = \text{constante.}$$

Pour les courants de la 2e catégorie. les f. e. m. seront :

$$e_1 = E \sin kt$$

. . . . .

$$e_l = E \sin\left(kt + \frac{2(l-1)}{n}\pi\right)$$

. . . . .

$$e_n = E \sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$$

en posant $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k\,L}{r}$, on aura :

$$i_1 = \frac{E}{r}\cos\varphi \sin(kt - \varphi)$$

. . . . .

$$i_l = \frac{E}{r}\cos\varphi \sin\left(kt + \frac{2(l-1)}{n}\pi - \varphi\right)$$

. . . . .

$$i_n = \frac{E}{r}\cos\varphi \sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi - \varphi\right)$$

Le travail total sera à l'instant t :

$$T = e_1 i_1 + \ldots + e_l i_l + \ldots + e_n i_n = \frac{E^2}{2r}\cos\varphi \left\{ \sin kt \sin(kt - \varphi) + \ldots \right.$$

$$+ \sin\left(kt + \frac{2(l-1)}{n}\pi\right)\sin\left(kt + \frac{2(l-1)}{n}\pi - \varphi\right) + \ldots$$

$$\left. + \sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi - \varphi\right) \right.$$

comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left\{ \cos(a - b) - \cos(a + b) \right\}$$

on aura :

$$T = \frac{E^2}{2r}\cos\varphi \left\{ \cos\varphi - \cos(2kt - \varphi) + \ldots + \cos\varphi - \cos\left(2kt + \frac{4(l-1)}{n}\pi - \varphi\right) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \cos\varphi - \cos\left(2kt + \frac{4(n-1)}{n}\pi - \varphi\right) \right\}$$

Comme la somme des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{4\pi}{n}$ est égal à zéro (page 22), on aura finalement :

$$T = \frac{n\,E^2}{2r}\cos^2\varphi = \text{constante}$$

§ 2. — MACHINES A COURANTS POLYPHASÉS

Les machines à courants polyphasés sont destinées à produire dans divers conducteurs, des courants décalés d'un certain angle les uns par rapport aux autres.

Il suffit donc, dans le cas d'une machine à tambour, de placer les bobines de manière que leurs axes fassent entre eux l'angle de décalage demandé pour les courants.

Dans le cas de machines à anneau ou à disque, il suffira d'intercaler entre les bobines A et C, dont les axes font entre eux l'angle $\frac{2\pi}{M}$, d'autres bobines.

Si par exemple on veut obtenir trois courants décalés de $\frac{2\pi}{3}$ de l'un à l'autre. On intercalera entre les bobines A et C, deux nouvelles bobines dont les axes comprendront entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{3M}$.

On réunira ensuite, soit en tension, soit en quantité toutes les bobines dont les axes feront entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{M}$. On aura ainsi trois systèmes soumis à des f. e. m. décalées de $\frac{2\pi}{3}$ l'une par rapport à l'autre, qu'il suffira de relier par l'intermédiaire de collecteurs et de balais aux conducteurs formant le circuit extérieur.

§ 3. — COUPLAGE DES ALTERNATEURS

Deux alternateurs ne peuvent être couplés en série; en effet, si l'un d'eux vient à retarder par rapport à l'autre, le travail qu'il aura à fournir augmentera. Cette augmentation de travail aura pour résultat de retarder encore l'alternateur, déjà en retard, de sorte qu'il arrivera bientôt à se mettre en opposition avec le premier.

Il y aura alors équilibre stable et les deux alternateurs travailleront sans fournir de courant sur la ligne.

Ce fait est facile à expliquer, en représentant graphiquement les

valeurs instantanées de f. e. m. et des intensités des courants ; comme l'a indiqué M. Hopkinson.

Si (fig. 40), la courbe A représente les valeurs instantanées de la

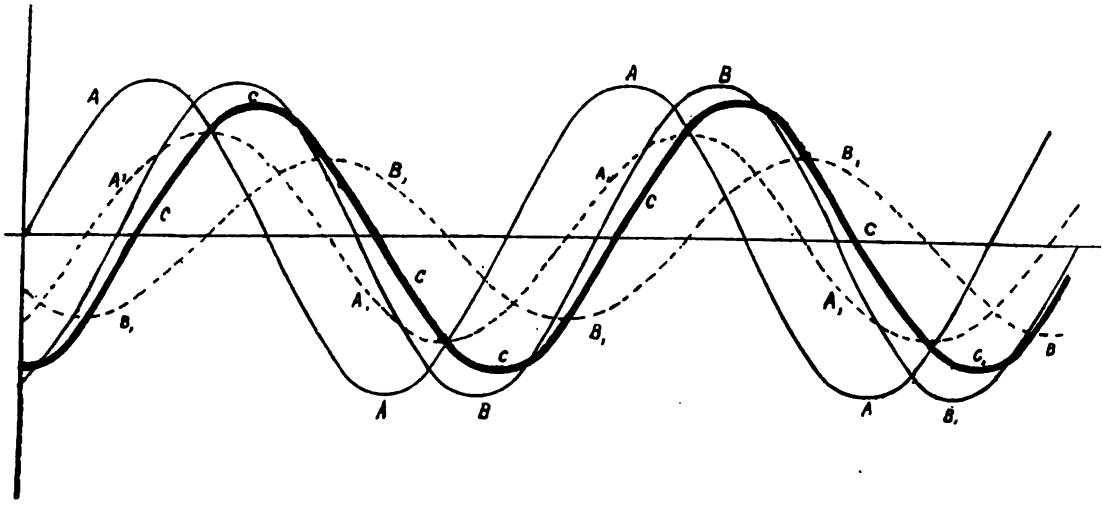


Fig. 40.

f. e. m. du premier alternateur, et B celles de la f. e. m. du second alternateur, en retard sur le premier, les courbes A_1 et B_1, représentent respectivement les valeurs instantanées des courants fournis par les deux alternateurs.

En additonnant les ordonnées des courbes A_1 et B_1 on obtient la courbe représentant les valeurs instantanées du courant circulant dans le circuit. Le travail moyen du premier alternateur est proportionnel à la moyenne de la somme des produits des ordonnées de A, par les ordonnées correspondantes de C, et le travail moyen fourni par le second alternateur est proportionnel à la moyenne de la somme des produits des ordonnées de B par les ordonnées correspondantes de C.

Or la moyenne de ces derniers produits sera évidemment plus élevée que celle des premiers, car la courbe C se rapproche plus de la courbe B que de la courbe A.

On peut, du reste, le démontrer directement, soient $e = E_a \sin kt$ la valeur instantanée de la f. e. m. du premier alternateur en avance et $e' = E_a \sin (kt-\alpha)$ celle de la f. e. m. du second alternateur.

Les valeurs instantanées des intensités des courants, produits par chacun des alternateurs, seront :

$$i_1 = \frac{E_a}{r} \cos\varphi \sin(kt - \varphi)$$

$$i_2 = \frac{E_a}{r} \cos\varphi \sin(kt - \alpha - \varphi)$$ (voir page 32)

en prenant $\operatorname{tg}\varphi = \frac{kL}{r}$.

L et r étant le coefficient de s. i. et la résistance du circuit, alternateurs compris.

Le courant total sera :

$$i = i_1 + i_2 = \frac{E_a}{r} \cos\varphi \left\{ \sin(kt - \varphi) + \sin(kt - \alpha - \varphi) \right\} = \frac{E_a}{r} \cos\varphi . \sin(kt - \varphi')$$

et on aura :

$$\sin\varphi' = \sin \quad + \sin(\alpha + \varphi)$$

$$\cos\varphi' = \cos\varphi + \cos(\alpha + \varphi)$$ (voir page 15)

Le travail du premier alternateur sera :

$$(e\,i)_{moy} = \frac{E_a^2}{r} \cos\varphi \left\{ \sin kt \sin(kt - \varphi') \right\}_{moy} = \frac{E_a^2}{2r} \cos\varphi \cos\varphi'$$

celui de second sera :

$$(e'i)_{moy} = \frac{E_a^2}{r} \cos\varphi \left\{ \sin(kt - \alpha) \sin(kt - \varphi') \right\}_{moy} = \frac{E_a^2}{2r} \cos\varphi . \cos(\alpha - \varphi')$$

Le travail du premier alternateur sera proportionnel à :

$$a_1 = \cos\varphi' = \cos\varphi + \cos(\alpha + \varphi)$$

Celui du second sera proportionnel à :

$$a_2 = \cos(\alpha - \varphi') = \cos\alpha \cos\varphi' + \sin\alpha \sin\varphi' = \cos\alpha \cos\varphi$$

$$+ \cos^2\alpha \cos\varphi - \cos\alpha \sin\alpha \sin\varphi + \sin\alpha \sin\varphi + \sin^2\alpha \cos\varphi$$

$$+ \sin\alpha \cos\alpha . \sin\varphi = \cos\varphi + \cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi$$

$$a_2 = \cos\varphi + \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi + 2\sin\alpha\sin\varphi$$

$$= \cos\varphi + \cos(\alpha+\varphi) + 2\sin\alpha\sin\varphi$$

Comme nous l'avons vu, φ est toujours plus petit que $\frac{\pi}{2}$, $2\sin\alpha\cos\alpha$ est toujours positif (pour $\alpha < \pi$), c'est-à-dire que le travail de l'alternateur en retard sera toujours plus grand que celui de l'alternateur en avance.

Le tableau suivant donne le travail de chaque alternateur pour les diverses valeurs α comprises entre o et π.

	TRAVAIL DU	
	1er alternateur	2me alternateur (en retard de α)
Pour $\alpha = o$.	$2\cos\varphi$	$2\cos\varphi$
Pour α compris entre o et $\frac{\pi}{2} - \varphi$	$a_1 < 2\cos\varphi$	$a_2 > a_1$
Pour $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$	$a_1 = \cos\varphi$	$a_2 > \cos\varphi$
Pour α compris entre $\frac{\pi}{2} - \varphi$ et $\pi - 2\varphi$ . . .	$a_1 < \cos\varphi$	$a_2 > a_1$
Pour $\alpha = \pi - 2\varphi$.	$a_1 = o$	$a_2 > o$
Pour α compris entre $\pi - 2\varphi$ et $\pi - \varphi$ . . .	$a_1 < o$	$a_2 > o$
Pour $\alpha = \pi - \varphi$	$a_1 = \cos\varphi - 1$	$a_2 > o$
Pour $\alpha = \pi$.	0	0

On voit facilement d'après ce tableau, que dès que l'un des alternateurs retarde légèrement par rapport à l'autre, le travail qu'il aura à fournir sera plus grand que celui que devra fournir l'autre, de sorte que l'angle de retard tendra à augmenter et cela jusqu'à ce qu'il devienne égal à 2π. A ce moment, aucun des alternateurs ne fournira de travail et l'ensemble sera dans une position d'équilibre stable.

Il est à remarquer que, pour les valeurs de α, comprises entre $\pi - 2\varphi$ et π, le premier alternateur absorbe du travail.

M. Hopkinson a démontré que deux alternateurs identiques peuêtre accouplés en quantité.

En effet, si (fig. 41), A et B représentent les collecteurs de deux alternateurs, on peut relier les balais *a* et *a'* par un conducteur et les balais *b* et *b'* par un autre conducteur; en dérivant le circuit principal sur ces deux conducteurs les deux alternateurs seront couplés en quantité.

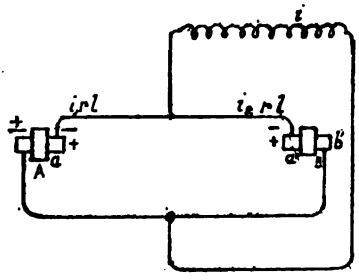


Fig. 41.

On voit que dans le circuit *a a' b' b*, les deux arternateurs sont accouplés en série, par conséquent, d'après ce qui précède, ils tendront à rendre à chaque instant les f. e. m. en *a* et en *a'* égales, et de même signe. De même qu'en *b* et *b'* les f. e. m. seront encore égales mais de signe contraire à celles agissant en *a* et *a'*.

En reliant donc ces deux parties par un conducteur, ce dernier sera parcouru par un courant alternatif.

On peut chercher quelles sont les meilleures conditions pour le couplage de deux alternateurs identiques, travaillant en quantité sur un circuit de résistance R.

Supposons qu'à un instant donné un des deux alternateurs soit décalé en avance de l'angle α, nous pourrons écrire :

$$e_1 = E \sin kt$$

$$e_2 = E \sin (kt + \alpha)$$

Les valeurs instantanées des courants pourront être désignées par les fonctions :

$$i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

$$i_2 = X_2 \sin (kt - \varphi_2)$$

Le travail moyen de la première machine (celle dont la f. e. m. est décalée en retard de α), sera :

$$T_m = (e_1 i_1)_{moy} = E \sin kt \; X_1 \sin (kt - \varphi_1) = \frac{E}{2} X_1 \cos \varphi_1$$

Cherchons la valeur de $X_1 \cos \varphi_1$,

Si nous désignons par i la valeur instantanée du courant circulant dans le circuit principal, et par e' la valeur instantanée de la différence de potentiel aux bornes de ce circuit, nous aurons :

$$e' = R\, i = R\, i_1 + R\, i_2$$

Dans le circuit du premier alternateur nous aurons, si l est le coefficient de s. i. d'un alternateur et r sa résistance.

$$e_1 - e' - r i_1 - l \frac{di_1}{dt} = o$$

Dans le circuit du deuxième alternateur, nous aurons :

$$e_2 - e' - r i_2 - l \frac{di_2}{dt} = o$$

et en remplaçant e' par sa valeur :

$$e_1 - (R + r)\, i_1 - R\, i_2 - l \frac{di_1}{dt} = o$$

$$e_2 - (R + r)\, i_2 - l \frac{di_2}{dt} - R\, i_1 = o$$

Mais :

$$\frac{di_1}{dt} = k\, X_1 \cos (kt - \varphi_1)$$

$$\frac{di_2}{dt} = k\, X_2 \cos (kt - \varphi_2)$$

Nous aurons donc :

$$E \sin kt - (R + r)\, X_1 \sin (kt - \varphi_1) - kl\, X_1 \cos (kt - \varphi_1) - R X_2 \sin (kt - \varphi_2) = o$$

$$E \sin (kt + \alpha) - R X_1 \sin (kt - \varphi_1) - (R + r) X_2 \sin (kt - \varphi_2) - kl\, X_2 \cos (kt - \varphi_2) = o$$

M. Hopkinson a démontré que deux alternateurs identiques peuvent être accouplés en quantité.

En effet, si (fig. 41), A et B représentent les collecteurs de deux alternateurs, on peut relier les balais a et a' par un conducteur et les balais b et b' par un autre conducteur; en dérivant le circuit principal sur ces deux conducteurs les deux alternateurs seront couplés en quantité.

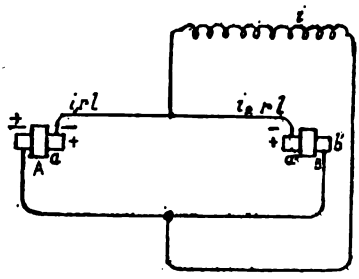


Fig. 41.

On voit que dans le circuit $a\ a'\ b'\ b$, les deux arternateurs sont accouplés en série, par conséquent, d'après ce qui précède, ils tendront à rendre à chaque instant les f. e. m. en a et en a' égales, et de même signe. De même qu'en b et b' les f. e. m. seront encore égales mais de signe contraire à celles agissant en a et a'.

En reliant donc ces deux parties par un conducteur, ce dernier sera parcouru par un courant alternatif.

On peut chercher quelles sont les meilleures conditions pour le couplage de deux alternateurs identiques, travaillant en quantité sur un circuit de résistance R.

Supposons qu'à un instant donné un des deux alternateurs soit décalé en avance de l'angle α, nous pourrons écrire :

$$e_1 = E \sin kt$$

$$e_2 = E \sin (kt + \alpha)$$

Les valeurs instantanées des courants pourront être désignées par les fonctions :

$$i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

$$i_2 = X_2 \sin (kt -$$

Le travail moyen de la première ma
décalée en retard de α), sera :

ire accouplés en
facteur dépend
étant données,
ière que le fac-

ation graphique,
ns les différents

lleure aptitude au
stance intérieure :

ns, numéros de janvier et de

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, dans ces équations, nous obtenons les quatre équations suivantes :

$$(R + r)\, X_1 \sin \varphi_1 - kl\, X_1 \cos \varphi_1 + RX_2 \sin \varphi_2 = o$$

$$E - kl\, X_1 \sin \varphi_1 - (R + r)\, X_1 \cos \varphi_1 - RX_2 \cos \varphi_2 = o$$

$$E \sin \alpha + RX_1 \sin \varphi_1 + (R + r)\, X_2 \sin \varphi_2 - kl\, X_2 \cos \varphi_2 = o$$

$$E \cos \alpha - RX_1 \cos \varphi_1 - klX_2 \sin \varphi_2 - (R + r)\, X_2 \cos \varphi_2 = o$$

dans lesquelles, $X_1 \sin \varphi_1$, $X_1 \cos \varphi_1$, $X_2 \sin \varphi_2$ et $X_2 \cos \varphi_2$, sont les quatre inconnues, nous pouvons donc en déduire la valeur de $X_2 \cos \varphi_2$; en effectuant les calculs, nous aurons :

$$X_2 \cos \varphi_2 = E\, \frac{(R+r)(2Rr + r^2 + k^2l^2) - 2kl\,R\,(R+r) \sin \alpha + R \cos \alpha\,(k^2l^2 - 2Rr - r^2)}{(2Rr + r^2)^2 + 2k^2l^2 \left\{ 2R^2 + 2Rr + r^2 \right\} + k^4 l^4}$$

Le travail de l'alternateur en retard de α sur l'autre, sera donc :

$$T_m = \frac{E^2}{2}\, \frac{(R+r)(2Rr + r^2 + k^2l^2) - 2\,kl\,R\,(R+r) \sin \alpha + R \cos \alpha\,(k^2l^2 - 2Rr - r^2)}{(2Rr + r^2)^2 + 2k^2l^2 \left\{ 2R^2 + 2Rr + r^2 \right\} + k^4 l^4}$$

En remplaçant α par $-\nu$, on obtiendra le travail moyen de l'alternateur en avance de α, car on peut poser :

$$e_1 = E \sin kt$$

$$e_2 = E \sin (kt - \alpha)$$

On aura donc :

$$T'_m = \frac{E^2}{2}\, \frac{(R+r)\,(2Rr + r^2 + k^2l^2) + 2kl\,R\,(R+r) \sin \alpha + R \cos \alpha\,(k^2l^2 - 2Rr - r^2)}{(2Rr + r^2)^2 + 2k^2l^2 \left\{ 2R^2 + 2Rr + r^2 \right\} + k^4 l^4}$$

On voit que le travail de l'alternateur dont la f. e. m. sera décalée en avance sera plus grand que celui de l'autre, il retardera donc, et les deux alternateurs tendront à produire des f. e. m. non décalées.

La différence de travail est :

$$\frac{4\,kl\,R\,(R+r)\sin\alpha}{(2Rr+r^2)^2+2k^2l^2\left\{2R^2+2Rr+r^2\right\}+k^4l^4}$$

Les deux alternateurs seront d'autant plus aptes à être accouplés en quantité, que le facteur de sin α sera plus grand. Ce facteur dépend de k, de l, de R et de r, et dans chaque cas, on pourra, étant données, trois de ces quantités, déduire la quatrième, de manière que le facteur soit maximum.

M. A. Blondel a étudié, au moyen de la représentation graphique, les conditions de couplages des alternateurs (1) dans les différents cas qui peuvent se présenter.

M. Hopkinson donne comme règle pour la meilleure aptitude au couplage, *que l'inductance doit être égale à la résistance intérieure :*

$$\frac{2\pi l}{R}=r.$$

(1) *Bulletin de la Société internationale des électriciens*, numéros de janvier et de mars 1893.
La Lumière électrique, tomes XLV et XLVI.

CHAPITRE IV.

Les courants polyphasés.

§ 1. — THÉORIES DES CHAMPS MAGNÉTIQUES TOURNANTS.

On obtient un champ magnétique tournant d'intensité uniforme, en prenant par exemple, des cadres identiques, que l'on place symétriquement, autour d'un axe médian commun, ces cadres, étant intercalés dans des circuits parcourus par des courants périodiques simples de même phase, décalés d'un certain angle d'un cadre à l'autre.

On peut classer les champs tournants *en deux catégories* suivant les angles que font entre eux les cadres et les angles de décalage des courants qui circulent dans ces cadres.

1° *Champs de la première catégorie.*

Les n cadres font entre eux des angles égaux à $\frac{\pi}{n}$, et les courants sont décalés de $\frac{\pi}{n}$, d'un cadre à l'autre.

Le type des champs de cette catégorie est *le champ biphasé.*

2° *Champs de la deuxième catégorie.*

Le n cadres font entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{n}$, et les courants sont décalés de $\frac{2\pi}{n}$ d'un cadre à l'autre.

Dans ce cas, n, le nombre des cadres, doit être impair.

En effet, si n était pair, les cadres se superposeraient deux à deux; les deux cadres superposés seraient disposés en sens inverse, et parcourus par des courants égaux et de sens opposé, c'est-à-dire que

chacune des paires de cadres agirait comme un seul cadre ayant son nombre de spires doublé.

Prenons, par exemple, $n = 4$ (fig. 42).

Soit AB la projection du premier cadre sur un plan perpendiculaire à l'axe médian commun, la projection du deuxième sera A'B', car il fait avec le premier un angle $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; celle du troisième sera A" B"; celle du quatrième A"' B"'.

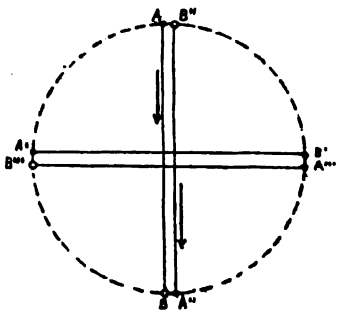


Fig. 42

Les cadres seront parcourus par des courants dont les intensités auront les valeurs instantanées.

$$i_1 = I \sin kt$$

$$i_2 = I \sin \left(kt + \frac{\pi}{2}\right) = I \cos kt$$

$$i_3 = I \sin (kt + \pi) = - I \sin kt = - i_1$$

$$i_4 = I \sin \left(kt + \frac{3\pi}{2}\right) = - I \cos kt = - i_2$$

Le cadre AB sera parcouru, à un moment donné, par un courant dirigé par exemple de A vers B, et le cadre A"B", qui lui est superposé, par un courant dirigé de B', vers A"; on voit donc que ces deux cadres agiront comme un cadre unique double.

Le type des champs de la deuxième catégorie est *le champ triphasé*.

Les valeurs instantanées des intensités des courants, parcourant les divers cadres d'un champ de la première catégorie, sont données par les équations :

$$i_1 = I \sin kt$$

$$i_2 = I \sin \left(kt + \frac{\pi}{n}\right)$$

$$i_n = \mathrm{I} \sin \left(kt + \frac{n-1}{n} \pi \right)$$

La somme des valeurs instantanées des intensités est :

$$i_{total} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}} \sin kt + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}} \cos kt$$

Il faudra donc employer pour compléter les circuits, au moins un fil de retour commun, qui sera parcouru par un courant dont l'intensité est donnée ci-dessus.

Les valeurs instantanées des intensités des courants, circulant dans les n cadres d'un champ de la deuxième catégorie, sont :

$$i_1 = \mathrm{I} \sin kt$$

$$i_2 = \mathrm{I} \sin \left(kt + \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$i_n = \mathrm{I} \sin \left(kt + \frac{2(n-1)}{n} \pi \right)$$

La somme des sinus de n angles, formant une progression arithmétique, dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, étant nulle (page 21), on voit que la somme des valeurs instantanées des intensités des courants est toujours nulle.

Dans ce cas, on pourra faire l'économie du fil de retour, puisque la valeur instantanée du courant qui y circulerait est toujours nulle. Il suffira donc de réunir entre elles les extrémités des fils des circuits à la sortie des cadres.

Les cadres étant parcourus par des courants décalés, les uns par rapport aux autres, ainsi que nous l'avons expliqué, donnent naissance à un champ magnétique uniforme tournant autour de l'axe, avec une vitesse uniforme k, ainsi que nous allons le démontrer.

Champs de la première catégorie. — Les n cadres, faisant entre

eux des angles égaux à $\frac{\pi}{n}$, sont parcourus par des courants alternatifs simples, décalés de $\frac{\pi}{n}$ d'un cadre à l'autre.

Soient, figure 43, 1 — 1, 2 — 2..., n — n, les projections des cadres sur un plan perpendiculaire à l'axe commun de symétrie.

Quand le cadre 1 — 1, est parcouru par un courant d'intensité i_1 il donne lieu à un champ de force dont les lignes sont perpendiculaires à son plan, suivant la direction OA. Si Φ_o est le flux de force par unité de surface pour un courant d'intensité égale à l'unité, le flux de force par unité de surface sera $\Phi_o i_1$; prenons OA perpendiculaire à 1 — 1, et proportionnel à $\Phi_o i_1$; de même, prenons pour le cadre 2 — 2, OB proportionnel à $\Phi_o i_2$, etc...;

Projetons ces lignes : 1° sur 1 — 1; 2° sur un axe perpendiculaire à 1 — 1, nous aurons :

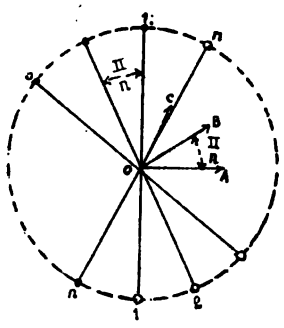


Fig. 43.

$$R_1 = \Phi_o \left(i_1 \sin o + i_2 \sin \frac{\pi}{n} + \ldots\ldots \quad + i_n \sin \frac{n-1}{n} \pi \right)$$

$$R_1 = \Phi_o I \left\{ \sin kt \sin o + \sin \left(kt + \frac{\pi}{n} \right) \sin \frac{\pi}{n} + \ldots + \sin \left(kt + \frac{n-1}{n} \pi \right) \sin \frac{n-1}{n} \pi \right.$$

Comme :

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2} \cos (a - b) - \frac{1}{2} \cos (a + b)$$

nous aurons :

$$R_1 = \frac{\Phi_o I}{2} \left[\cos kt - \cos \left(kt + \frac{2\pi}{n} \right) + \cos kt - \cos \left(kt + \frac{4\pi}{n} \right) + \ldots \right.$$

$$\left. + \cos kt - \cos \left(kt + \frac{2 (n-1)}{n} \right) \right]$$

$$R_1 = \frac{\Phi_o I}{2} \left[(n-1) \cos kt - \left\{ \cos \left(kt + \frac{2\pi}{n} \right) + \ldots + \cos \left(kt + \frac{2 (n-1)}{n} \pi \right) \right\} \right]$$

$$R_1 = \frac{\Phi_o I}{2}\left[n\cos kt - \left\{\cos kt + \cos\left(kt + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right\}\right]$$

La somme des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique, dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, étant égale à zéro (page 21), nous aurons :

$$R_1 = \frac{n\Phi_o I}{2}\cos kt$$

En projetant les lignes OA, OB, etc., sur un axe perpendiculaire à 1 — 1, nous aurons :

$$R_2 = \Phi_o\left(i_1 + i_2\cos\frac{\pi}{n} + i_3\cos\frac{2\pi}{n} + \ldots + i_n\cos\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$R_2 = \Phi_o I\left\{\sin kt + \sin\left(kt + \frac{\pi}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} + \ldots + \sin\left(kt + \frac{n-1}{n}\pi\right)\cos\frac{n-1}{n}\pi\right.$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b)$$

$$R_2 = \frac{\Phi_o I}{2}\left[2\sin kt + \sin kt + \sin\left(kt + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin kt + \sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right\}$$

$$R_2 = \frac{\Phi_o I}{2}\left[n\sin kt + \sin kt + \sin\left(kt + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(kt + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right]$$

La somme des sinus de n angles, formant une progression arithmétique, dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, étant égale à zéro (page 21), nous aurons :

$$R_2 = \frac{n\Phi_o I}{2}\sin kt$$

La résultante sera donc une ligne dont la longueur sera :

$$\frac{n\Phi_o I}{2}$$

faisant avec 1 — 1 l'angle kt (fig. 44).

Le flux, par unité de surface ou l'intensité du champ magnétique résultant, sera $\frac{n\Phi_0 I}{2}$, et ce champ tournera autour de l'axe de symétrie avec une vitesse angulaire k, en faisant à l'instant t, l'angle kt, avec le cadre 1 — 1.

Considérons par exemple, le $p^{ième}$ cadre, qui est parcouru par un courant dont l'intensité est donnée par la relation :

$$i_p = I \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi\right)$$

Il fait, avec le premier cadre, un angle $\frac{p-1}{n}\pi$ et avec la direction du champ magnétique, un angle

$$kt + \frac{p-1}{n}\pi$$

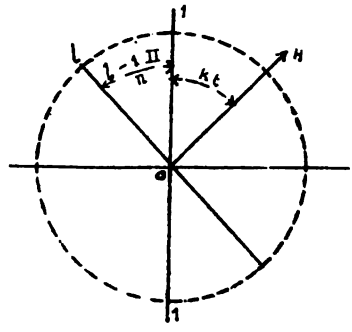


Fig. 44.

Si S est la surface totale des spires de ce cadre, le nombre total des lignes de force qui le traverseront provenant du champ tournant sera :

$$\frac{Sn\Phi_0 I}{2} \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi\right)$$

Si le cadre était isolé, le nombre total des lignes de force qui le traverseraient (dues à sa s. i.), serait:

$$S\Phi_0 I \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi\right)$$

et Φ_0 S serait son coefficient de s, i., que l'on peut représenter par l.

Si l'on veut tenir compte de l'influence de l'ensemble des cadres, il faudra, pour chacun d'eux, remplacer son coefficient de s. i. l, par $L = nl$, n, étant le nombre des cadres. On peut donc énoncer la règle suivante :

Quand n *cadres identiques, disposés autour d'un axe médian com-*

mun, et faisant entre eux des angles de $\frac{\pi}{n}$, *sont parcourus par des courants périodiques, simples de même intensité maximum, décalés de* $\frac{\pi}{n}$, *d'un cadre à l'autre, la f. e. m., due à l'induction de l'ensemble des cadres, sur l'un d'entre eux, est une fonction périodique simple qui agit comme la s. i. du cadre lui-même.*

C'est-à-dire en somme que, pour obtenir dans les cadres, des courants décalés de $\frac{\pi}{n}$, les uns par rapport aux, il suffira d'appliquer des f. e. m. extérieures décalées de $\frac{\pi}{n}$, les unes par rapport aux autres. Chacun des courants sera décalé d'une même quantité, par rapport à la f. e. m. extérieure agissant sur son cadre, de sorte que les courants seront décalés de $\frac{\pi}{n}$ d'un cadre à l'autre.

Champs de la deuxième catégorie. — Les n cadres, faisant entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{n}$, sont parcorus par des courants alternatifs simples, décalés de $\frac{2\pi}{n}$ d'un cadre à l'autre.

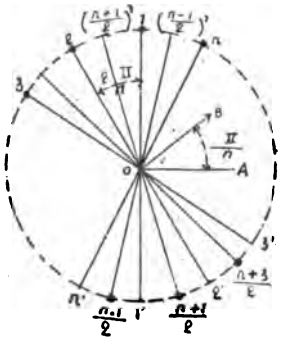


Fig. 45.

Soient figure 45, 1 — 1', 2 — 2' ... n — n', les projections des cadres, sur un plan perpendiculaire à l'axe commun de symétrie.

Quand le cadre 1 — 1, est parcouru par un courant d'intensité i_1, il donne naissance à un champ de magnétique dont la direction est perpendiculaire à son plan, suivant OA.

Si Φ_o est le flux de force par unité de surface, pour un courant d'intensité égale à l'unité, le flux de force par unité de surface sera $\Phi_o\, i_1$. Prenons OA, perpendiculaire à 1 — 1' et proportionnel à $\Phi_o\, i_1$, de même OB proportionnel à $\Phi_o\, i_2$ et perpendiculaire à 2 — 2';

Projetons ces lignes : 1° sur 1 — 1; 2° sur un axe perpendiculaire à 1 — 1, nous aurons :

$$R_1 = \Phi_o \left\{ i_1 \sin o + i_2 \sin \frac{2\pi}{n} + \ldots + i_n \sin \frac{2(n-1)}{n}\pi \right\}$$

$$R_1=\Phi_o I\left\{\sin kt.\sin o+\sin\left(kt+\frac{2\pi}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\left(kt+\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\sin\frac{2(n-1)}{n}\pi\right\}$$

$$\sin a \sin b=\frac{1}{2}\cos(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a+b)$$

$$R_1=\frac{\Phi_o I}{2}\left\{\cos kt-\cos\left(kt+\frac{4\pi}{n}\right)+\cos kt-\cos\left(kt+\frac{8\pi}{n}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+\cos kt-\cos\left(kt+\frac{4(n-1)}{n}\pi\right)\right\}$$

$$R_1=\frac{\Phi_o I}{2}\left[n\cos kt-\left\{\cos kt+\cos\left(kt+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(kt+\frac{4(n-1)}{n}\pi\right)\right\}\right]$$

La somme des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique, dont la raison est $\frac{4\pi}{n}$, étant égale à zéro (page 22) nous aurons donc :

$$R_1=\frac{n\,\Phi_o I}{2}\cos kt$$

En projetant sur un axe, perpendiculaire à 1 — 1', nous aurons :

$$R_2=\Phi_o\left(i_1+i_2\cos\frac{2\pi}{n}+i_3\cos\frac{4\pi}{n}+\ldots+i_n\cos\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$$

$$R_2=\Phi_o I\left\{\sin kt+\sin\left(kt+\frac{2\pi}{n}\right)\cos\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\left(kt+\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\cos\frac{2(n-1)}{n}\pi\right\}$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\sin(a+b)+\frac{1}{2}\sin(a-b)$$

$$R_2=\frac{\Phi_o I}{2}\left[2\sin kt+\sin kt+\sin\left(kt+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin kt+\sin\left(kt+\frac{4(n-1)}{n}\pi\right)\right]$$

$$R_2=\frac{\Phi_o I}{2}\left[n\sin kt+\sin kt+\sin\left(kt+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(kt+\frac{4(n-1)}{n}\pi\right)\right]$$

La somme des sinus de n angles, formant une progression arithmétique, dont la raison est $\frac{4\pi}{n}$, étant nulle, nous aurons :

$$R_s = \frac{n\Phi_o I}{2} \sin kt$$

Comme dans le cas des courants de la première catégorie, le champ tournera autour de l'axe de symétrie avec une vitesse angulaire k, et fera à chaque instant, avec le cadre 1 — 1', un angle kt.

Comme dans le premier cas, le nombre de lignes par unité de surface du champ sera :

$$\frac{n\Phi_o I}{2}$$

Considérons, le l^{me} cadre, qui est parcouru par un courant :

$$i_l = I \sin \left(kt + \frac{2(l-1)}{n} \pi \right)$$

Ce cadre fait avec la direction du champ magnétique, un angle égal à $kt + \frac{2(l-1)}{n} \pi$ (fig. 44, l'angle 10 l, étant égal à $\frac{2(l-1)}{n} \pi$).

Si S est la surface totale des spires du cadre, le flux de force qui le traverse est :

$$\frac{S n \Phi_o I}{2} \sin \left(kt + \frac{l-1}{n} \pi \right)$$

Si le cadre était isolé, le flux de force, dû à sa s. i., qui le traverserait serait :

$$S \Phi_o I \sin \left(kt + \frac{l-1}{n} \pi \right)$$

et $\Phi_o S$ seraient son coefficient de s. i., que l'on peut représenter par l.

Si l'on tient compte de l'influence du champ ou de l'ensemble des cadres, il faudra dans chaque cadre, remplacer le coefficient de s. i.

l, par $L = nl$, n étant le nombre des cadres, on peut donc énoncer comme dans le premier cas, la règle suivante :

Quand n cadres identiques, disposés symétriquement autour d'un axe médian commun et faisant entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{n}$, *sont parcourus par des courants périodiques simples de même intensité maximum, décalés de* $\frac{2\pi}{n}$, *d'un cadre à l'autre, la f. e. m. due à l'induction de l'ensemble des cadres sur l'un d'entre eux, est une fonction périodique simple qui agit comme la f. e. m. due à la s. i. de ce cadre.*

C'est-à-dire qu'en somme pour obtenir dans les cadres des courants décalés de $\frac{2\pi}{n}$, les uns par rapport aux autres, il suffira d'appliquer des f. e. m. extérieures décalées de $\frac{2\pi}{n}$, les unes par rapport aux autres.

Dans la pratique, pour obtenir des champs plus intenses, on remplace les cadres par des bobines enroulées, par exemple, sur un anneau, ou bien se faisant face ; dans tous les cas, en disposant les bobines de manière à ce qu'elles fassent entre elles les mêmes angles que les cadres, on obtient un champ magnétique tournant.

Si les cadres ou les bobines sont parcourus par des courants d'intensités efficaces différentes, ou bien si ces courants n'ont pas exactement le décalage voulu, on obtient un *champ tournant elliptique*, représenté en général par le rayon vecteur d'un ellipse, qui décrit des aires égales en des temps égaux, et équivalant à l'ensemble d'un champ alternatif de direction constante et d'un champ tournant circulaire (1).

(1) Conférence de M. Mascart sur les moteurs à courants alternatifs. *Bulletin de la Société internationale des Electriciens*, n° 101, août-octobre 1893.

§ 2. — DES SYSTÈMES DE MONTAGE DES LIGNES A COURANTS POLYPHASÉS

1° *Considérations générales.*

Nous avons distingué deux catégories de courants polyphasés, pouvant produire des champs magnétiques tournants uniformes.

Dans la première catégorie, les n courants sont décalés de $\frac{\pi}{n}$ l'un par rapport à l'autre; le type du moteur actionné par ces courants est le moteur *biphasé*.

La somme des valeurs instantanées des intensités des courants n'est pas nulle, aussi faut-il, si des f. e. m. décalées de $\frac{\pi}{n}$ agissent dans les n circuits, ou bien constituer chacun d'eux séparément par deux fils (comme l'indique la figure 46 ; les f. e. m. étant développées dans les parties AB et CD, et les courants utilisés dans les parties A'B' et C'D', ou bien prendre un fil de retour commun, comme l'indique la figure 47.

Dans ce dernier cas, ainsi que nous le verrons, les courants ne sont pas décalés exactement de $\frac{\pi}{n}$ l'un par rapport à l'autre, mais sous certaines conditions, on peut cependant admettre, que pratiquement le décalage est le même que celui des f. e. m. et considérer le champ tournant comme uniforme.

Dans la deuxième catégorie, les n courants doivent être décalés de $\frac{2\pi}{n}$ l'un par rapport à l'autre et dans ce cas, leur somme est toujours nulle, de sorte que l'on peut économiser le fil de retour.

Etant donné n f. e. m. décalées de $\frac{2\pi}{n}$ l'une par rapport à l'autre, on peut faire le montage de plusieurs manières.

a. *En double étoile* (fig. 48). Les f. e. m. agissent dans les portions AO, BO, DO des circuits et les circuits du moteur sont en A'O', B'O', C'O' ;

b. *En double polygone* (double triangle pour les moteurs triphasés) (fig. 49). Les f. e. m, agissent dans les circuits AB, BC, CD et les circuits du moteur sont en A'B', B'C', C'D'.

c. *En étoile et polygone* (fig. 50) (étoile et triangle). Les f. e. m. agissent dans les portions OA, OB, OC des circuits et les circuits du moteur sont en A'B', B'C' et C'A'.

d. *En polygone et étoile* (fig. 51) (triangle et étoile). Les f. e. m. agissent dans les circuits AB, BC et CA et les circuits du moteur sont en A'O', C'O' et B'O'.

On peut aussi pour les deux catégories de courants polyphasés, développer dans un circuit une f. e. m. unique et former les circuits du moteur de dérivations, ou de circuits induits, agencés de telle sorte, que par suite de leur s. i. et de la capacité de condensateurs intercalés, les courants qui les parcourent soient décalés dans les conditions voulues.

Nous examinerons successivement ces divers cas, en les appliquant aux lignes destinées à desservir des moteurs biphasés ou triphasés, afin de simplifier les calculs. Les calculs pour le cas de moteurs dont les inducteurs seraient constitués par un plus grand nombre de circuits, seraient analogues.

Tous les circuits étant autant que possible identiques, doivent naturellement avoir la même s. i., de sorte qu'au point de vue du décalage, on arrive au même résultat, en admettant que ces circuits n'ont que de la résistance, ce qui simplifie les calculs (excepté pour le cas d'une f. e. m. unique, car alors les circuits dérivés doivent avoir des s. i. différentes), afin d'obtenir les décalages voulus, comme nous le verrons.

2° *Courants de la première catégorie* (type biphasé).

Montage avec circuits séparés. (Fig. 46). — Il n'y a rien de particulier dans ce cas, les phases des courants (puisque l'on suppose la s. i. nulle) coïncident avec celles des f. e. m. développées, nous aurons :

$$e_1 = (r + 2R + r')\, i_1 \qquad i_1 = \frac{E}{r + 2R + r'} \sin kt$$

$$e_2 = (r + 2R + r')\, i_2 \qquad i_2 = \frac{E}{r + 2R + r'} \sin \left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$$

Comparaison avec le courant monophasé. — Le travail moyen développé dans chaque circuit est (voir page 25) :

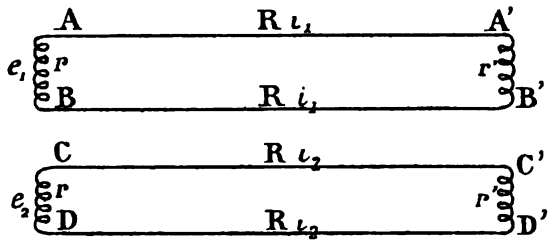


Fig. 46

$$\frac{E^2}{2(r+2R+r')}$$

le travail total est donc :

$$T = \frac{E^2}{r+2R+r'}$$

La résistance de chacun des circuits de ligne est 2R, la perte de travail dans chacun d'eux est :

$$2\,R\,(I_{efficace})^2$$

Nous savons que (voir page 25) :

$$(I_{efficace})^2 = \frac{E^2}{2\,(r+2R+r')^2}$$

La perte de travail totale dans la ligne sera donc :

$$P = \frac{2\,R\,E^2}{(r+2R+r')^2}$$

Supposons maintenant un courant monophasé, fournissant le même travail moyen, avec la f. e. m. efficace $\frac{E}{\sqrt{2}}$, le poids du métal employé pour la ligne étant le même.

$$T = \frac{E^2}{r+2R+r'}$$

Comme :

$$T = e_{eff}\, i_{eff}$$

l'intensité efficace sera :

$$\frac{E\sqrt{2}}{r+2R+r'}$$

La ligne ayant même poids que précédemment et étant composée de deux fils seulement, la résistance de chacun des fils sera $\frac{R}{2}$ et la résistance totale R.

La perte dans la ligne sera :

$$P' = R\,(i_{eff})^2 = \frac{2\,R\,E^2}{(r+2R+r')^2}$$

Donc avec le même poids de métal employé pour la ligne, on se trouve dans les mêmes conditions au point de vue de la perte de travail.

Naturellement la construction de la ligne coûtera plus cher, car on sera obligé de poser quatre conducteurs au lieu de deux :

b. Montage avec fil de retour unique. (Fig. 47).— En appliquant les lemmes de Kirchhoff, nous aurons :

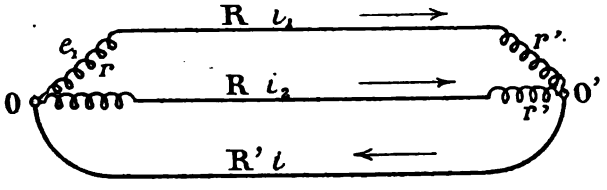


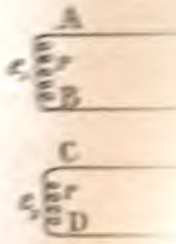
Fig. 47.

(1) $$i = i_1 + i_2$$

(2) $$e_1 = (r + R + r')\, i_1 + R' i = R_1 i_1 + R' i$$

(3) $$e_2 = (r + R + r')\, i_2 + R' i = R_1 i_2 + R' i$$

Nous aurons, en ajoutant les équations 2 et 3 :



le travail total est

La résistance
travail dans cha

Nous savons

La

Su
tra
po

$$-X_1 \sin \varphi_1 = -\frac{E}{R_1} B \sin \frac{\pi}{4}$$

$$X_1 \cos \varphi_1 = \frac{E}{R_1} \left\{ 1 - B \cos \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\frac{B}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{B}{\sqrt{2}}} = \frac{B}{\sqrt{2} - B} = \frac{\frac{R' \sqrt{2}}{R_1 + 2R'}}{\sqrt{2} - \frac{R' \sqrt{2}}{R_1 + 2R'}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R'}{R_1 + R'} = \frac{R'}{r + R + r' + R'}$$

$$\frac{E^2}{R_1^2} \left\{ \frac{B^2}{2} + 1 + \frac{B^2}{2} - \frac{2B}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{E^2}{R_1^2} \left\{ \frac{2R'^2}{(R_1 + 2R')^2} + 1 - \frac{2R'}{R_1 + 2R'} \right\}$$

$$X_1^2 = \frac{E^2}{R_1^2 (R_1 + 2R')^2} \left\{ (R_1 + 2R')^2 + 2R'^2 - 2R_1 R' - 4R'^2 \right\}$$

$$X_1^2 = \frac{E^2}{R_1^2 (R_1 + 2R')^2} \left\{ R_1^2 + 2R_1 R' + 2R'^2 \right\}$$

$$X_1 = \frac{E}{R_1 (R_1 + 2R')} \sqrt{(R_1 + R')^2 + R'^2}$$

Nous aurons donc :

$$i_1 = \frac{E}{R_1 (R_1 + 2R')} \sqrt{(R_1 + R')^2 + R'^2} \sin (kt - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R'}{R_1 + R'}$$

on 3, nous donne :

$$i_2 = \frac{e_2}{R_1} - \frac{R'}{R_1} i$$

$$R_1 i + 2R'i = e_1 + e_2$$

$$i = \frac{e_1 + e_2}{R_1 + 2R'} = \frac{E}{R_1 + 2R'} \left\{ \sin kt + \sin \left(kt + \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

En posant $i = X \sin (kt + \varphi)$, $\frac{E}{R_1 + 2R'} = A$ et en faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, nous aurons :

$$X \sin \varphi = A$$

$$X \cos \varphi = A$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 1 \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$X = A\sqrt{2} = \frac{E\sqrt{2}}{R_1 + 2R'}$$

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{R_1 + 2R'} \sin \left(kt + \frac{\pi}{4} \right)$$

L'équation 2, nous donne :

$$i_1 = \frac{e_1}{R_1} - \frac{R'}{R_1} i$$

$$X_1 \sin (kt - \varphi_1) = \frac{E}{R_1} \left\{ \sin kt - \frac{R'\sqrt{2}}{R_1 + 2R'} \sin \left(kt + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

Posons, pour simplifier :

$$\frac{R'\sqrt{2}}{R_1 + 2R'} = B$$

et faisons successivement :

$$kt = o \text{ et } kt = \frac{\pi}{2}$$

nous aurons :

$$-X_1 \sin \varphi_1 = -\frac{E}{R_1} B \sin \frac{\pi}{4}$$

$$X_1 \cos \varphi_1 = \frac{E}{R_1} \left\{ 1 - B \cos \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\frac{B}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{B}{\sqrt{2}}} = \frac{B}{\sqrt{2} - B} = \frac{\frac{R' \sqrt{2}}{R_1 + 2R'}}{\sqrt{2} - \frac{R' \sqrt{2}}{R_1 + 2R'}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R'}{R_1 + R'} = \frac{R'}{r + R + r' + R'}$$

$$X_1^2 = \frac{E^2}{R_1^2} \left\{ \frac{B^2}{2} + 1 + \frac{B^2}{2} - \frac{2B}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{E^2}{R_1^2} \left\{ \frac{2R'^2}{(R_1 + 2R')^2} + 1 - \frac{2R'}{R_1 + 2R'} \right\}$$

$$X_1^2 = \frac{E^2}{R_1^2 (R_1 + 2R')^2} \left\{ (R_1 + 2R')^2 + 2R'^2 - 2R_1 R' - 4R'^2 \right\}$$

$$X_1^2 = \frac{E^2}{R_1^2 (R_1 + 2R')^2} \left\{ R_1^2 + 2R_1 R' + 2R'^2 \right\}$$

$$X_1 = \frac{E}{R_1 (R_1 + 2R')} \sqrt{(R_1 + R')^2 + R'^2}$$

Nous aurons donc :

$$i_1 = \frac{E}{R_1 (R_1 + 2R')} \sqrt{(R_1 + R')^2 + R'^2} \sin (kt - \varphi_1)$$

avec :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R'}{R_1 + R'}$$

L'équation 3, nous donne :

$$i_2 = \frac{e_2}{R_1} - \frac{R'}{R_1} i$$

$$X_2 \sin(kt+\varphi_2) = \frac{E}{R_1}\left\{\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{R'\sqrt{2}}{R_1+2R'}\sin\left(kt+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

Posons encore:

$$\frac{R'\sqrt{2}}{R_1+2R'} = B$$

et faisons successivement:

$$kt = o \text{ et } kt = \frac{\pi}{2},$$

nous aurons:

$$X_2 \sin\varphi_2 = \frac{E}{R_1}\left(1 - B\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$X_2 \cos\varphi_2 = -\frac{E}{R_1} B\cos\frac{\pi}{4},$$

Comme :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

nous aurons :

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1} = -\frac{R_1+R'}{R'} = -\frac{r+R+r'+R'}{R'}$$

et

$$X_2 = X_1 = \frac{E}{R_1(R_1+2R')}\sqrt{(R_1+R')^2+R'^2}$$

Nous aurons donc:

$$i_2 = \frac{E}{R_1(R_1+2R')}\sqrt{(R_1+R')^2+R'^2}\sin(kt+\varphi_2)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{R_1+R'}{R'}$$

Le décalage des deux courants sera $\varphi_1 + \varphi_2$, et nous aurons :

$$tg(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2}{1 - tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2} = \frac{\dfrac{R'}{R_1 + R'} - \dfrac{R_1 + R'}{R'}}{2}$$

$$tg\,(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{R'^2 - R_1^2 - R'^2 - 2\,R_1\,R'}{2\,R'\,(R_1 + R')} = -\frac{R_1}{R'} \cdot \frac{R_1 + 2\,R'}{2\,(R_1 + R')}$$

Pour que le décalage soit $\frac{\pi}{2}$, on devrait avoir $tg\,(\varphi_1 + \varphi_2) = \pm\,\infty$.

Le décalage sera donc toujours plus grand que $\frac{\pi}{2}$ et il s'en rapprochera d'autant plus, que R' sera plus petit par rapport à $R_1 = r + r' + R$. Or r' ou R_1, en pratique est toujours très grand par rapport à R, car $r'\left(\frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2}\right)$ représente le travail utilisé, tandis que la perte dans la ligne est :

$$R\left(\frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2}\right) + R'\,\frac{I^2}{2}$$

On pourra donc admettre que pratiquement, le décalage est égal à $\frac{\pi}{2}$.

On peut chercher la meilleure utilisation de la ligne pour un poids donné de métal, à employer.

Il faut pour cela rendre la perte dans la ligne minimum (1).

Les sections des conducteurs étant, en raison inverse de leurs résistances, on aura si le volume du métal est constant :

$$\frac{2}{R} + \frac{1}{R'} = \text{constante}.$$

Il faut rendre minimum la relation :

$$P = R\left(\frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2}\right) + R'\,\frac{I^2}{2}$$

(1) Voir *les Courants polyphasés*, par J. Rodet et Busquet, pages 21 et suivantes.

$$\frac{I_1^2}{2} = \frac{I_2^2}{2} = \frac{X_1^2}{2} = \frac{E^2}{2 R_1^2 (R_1 + 2 R')^2} \left\{ (R_1 + R')^2 + R''^2 \right\}$$

$$\frac{I^2}{2} = \frac{X^2}{2} = \frac{E^2}{(R_1 + 2 R')^2}$$

On aura donc :

$$P = E^2 \left\{ R \frac{(R_1 + R')^2 + R''^2}{R_1^2 (R_1 + 2 R')^2} + \frac{R'}{(R_1 + 2 R')^2} \right\}$$

$$P = E^2 \frac{R_1^2 R + 2 R_1 R R' + 2 R R''^2 + R_1^2 R'}{R_1^2 (R_1 + 2 R')^2}$$

Comme, en pratique, R et R' sont très petits par rapport à $R_1 = r + R + r'$ (voir page 163) nous pouvons négliger les termes contenant RR' et RR'², nous devons donc rendre minimum l'expression :

$$\frac{R_1^2 R + R_1^2 R'}{R_1^2 (R_1 + 2 R')^2} = \frac{R + R'}{(R_1 + 2 R')^2}$$

Pour la même raison, il nous suffira de rendre minimum l'expression :

$$\frac{R + R'}{R_1^2 + 2 R_1 R'}$$

Comme $R_1 = r + r' + R$.

$$\frac{R + R'}{R_1^2 + 4 R_1 R'} = \frac{R + R'}{(r + r')^2 + R^2 + 4 (r + r') R + 4 (r + r') R' + 4 R R'}$$

ou en négligeant encore les termes RR' et R² :

$$\frac{R + R'}{(r + r')^2 + 4 (r + r') (R + R')}$$

ou

$$\frac{R + R'}{r + r' + 4 (R + R')} = \frac{1}{\frac{r + r'}{R + R'} + 4}$$

Il faudra donc rendre $\frac{r+r'}{R+R'}$ maximum, ou $(R+R')$ minimum.

De la relation (page 165) :

$$\frac{2}{R}+\frac{1}{R'}=c$$

nous tirons :

$$\frac{2}{R}=\frac{R'c-1}{R'} \qquad R=\frac{2R'}{R'c-1}$$

Nous devons donc avoir :

$$\frac{2R'}{R'c-1}+R' \text{ minimum.}$$

En prenant la dérivée par rapport à R' et en l'égalant à o, nous aurons :

$$\frac{(R'c-1)-2R'c}{(R'c-1)^2}+1=o$$

$$\frac{-2}{(R'c-1)^2}+1=o$$

$$(R'c-1)^2=2$$

$$R'c-1=\sqrt{2}$$

$$R'=\frac{1+\sqrt{2}}{c}$$

$$c=\frac{1+\sqrt{2}}{R'}$$

en portant cette valeur de c, dans l'expression :

$$\frac{2}{R}+\frac{1}{R'}=c$$

Nous aurons :

$$\frac{2}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1+\sqrt{2}}{R'}$$

$$\frac{2}{R} = \frac{\sqrt{2}}{R'} \qquad R = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,R'$$

Nous devons donc prendre, $R = 1{,}41\ R'$.

La section du fil de retour devra donc être 1,41 fois plus grande que la section adoptée pour les deux autres fils.

Comparaison avec le courant monophasé.

En admettant que $R' = \frac{R}{\sqrt{2}}$, la perte de travail dans la ligne est :

$$P = E^2 \frac{R_1^2 R + 2 R_1 \frac{R^2}{\sqrt{2}} + R^3 + R_1^2 \frac{R}{\sqrt{2}}}{R_1^2 (R_1 + R\sqrt{2})^2}$$

$$= E^2 \frac{R_1^2 R \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\, R_1 R^2 + R^3}{R_1^2 (R_1 + R\sqrt{2})^2}$$

Cherchons quel est le travail développé.

Dans le circuit parcouru par le courant d'intensité i_1, le travail est :

$$(e_1 i_1)_{moy}$$

$$e_1 = E \sin kt$$

$$i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$$

Nous aurons :

$$(e_1 i_1)_{moy} = \frac{E X_1}{2} \cos \varphi_1$$

$$\cos^2 \varphi_1 = \frac{1}{1 + tg^2 \varphi^2} = \frac{1}{1 + \frac{R'^2}{(R_1 + R')^2}} = \frac{(R_1 + R')^2}{R'^2 + (R_1 + R')^2}$$ (page 163)

Dans le circuit parcouru par i_2, le travail développé est :

$$(e_2 i_2)_{moy} \qquad e_2 = E \sin \left(kt + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i_2 = X_2 \sin (kt + \varphi_2) = X_1 \sin (kt + \varphi_2)$$

$$(e_2\, i_2)_{moy} = \frac{E\, X_1}{2} \sin \varphi_2$$

$$\sin^2 \varphi_2 = \frac{tg^2 \varphi_2}{1 + tg^2 \varphi_2} = \frac{\dfrac{(R_1 + R')^2}{R'^2}}{1 + \dfrac{(R_1 + R')^2}{R'^2}} = \frac{(R_1 + R')^2}{R''^2 + (R_1 + R')^2}$$

Le travail développé est donc le même pour chaque circuit, le travail total sera :

$$T = E X_1 \frac{R_1 + R'}{\sqrt{R'^2 + (R_1 + R')^2}}$$

$$X_1 = \frac{E}{R_1 (R_1 + 2R')} \sqrt{R'^2 + (R_1 + R')^2}$$ (page 163)

Nous aurons donc :

$$T = \frac{E^2 (R_1 + R')}{R_1 (R_1 + 2R')}$$

Un courant monophasé de même f. e. m. maximum E, produisant le même travail devra avoir une intensité efficace :

$$\frac{\sqrt{2}\ E (R_1 + R')}{R_1 (R_1 + 2R')}$$

Si R'' est la résistance d'un des fils de ligne, la perte totale de travail dans la ligne sera :

$$P_l = \frac{4 E^2 R'' (R_1 + R')^2}{R_1^2 (R_1 + 2R')^2}$$

Si l'on emploie le même poids de métal pour la ligne dans les deux cas, on devra avoir :

$$\frac{2}{R''} = \frac{2}{R} + \frac{1}{R'}$$

et comme :

$$R' = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{R'} = \frac{2}{R} + \frac{\sqrt{2}}{R}$$

$$R'' = \frac{2R}{2+\sqrt{2}}$$

Nous aurons donc :

$$P_1 = \frac{4E^2 \frac{2R}{2+\sqrt{2}} \left(R_1 + \frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}{R_1^2 (R_1 + R\sqrt{2})^2} = \frac{\frac{8E^2}{2+\sqrt{2}} \left(R_1^2 R + \frac{R^3}{2} + \sqrt{2} R_1 R^2\right)}{R_1^2 (R_1 + R\sqrt{2})^2}$$

Le rapport des pertes de travail dans les deux cas, sera :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\left(R_1^2 R \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} R_1 R^2 + R^3\right)}{\frac{8E^2}{2+\sqrt{2}} \left(R_1^2 R + \frac{R^3}{2} + \sqrt{2} R_1 R^2\right)}$$

R étant très petit par rapport à R_1, on aura à peu de chose près :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{8}{2+\sqrt{2}}} = \frac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{8\sqrt{2}} = \frac{8{,}22}{11{,}28} = 0{,}73$$

En employant un fil de retour unique avec le même poids de métal pour la ligne, on aura une economie de 27 % de perte de travail, par rapport à la ligne à courant monophasé et aussi par rapport à la ligne à courant biphasé à double circuit (voir page 161).

En donnant aux deux lignes des coefficients de s. i. différents, on peut arriver à rendre le décalage égal à $\frac{\pi}{2}$, dans ce cas, si L_1 et L_2 sont respectivement les coefficients de s. i. des lignes dans lesquelles agissent les f. e. m. e_1 et e_2, on devra avoir pour que les deux courants aient même intensité maximum et soient décalés de $\frac{\pi}{2}$.

$$k\,(L_2 - L_1) = 2\,R'$$

Ce que l'on peut démontrer de la manière suivante :
On a, en appliquant les lemmes de Kirchhoff :

$$(1)\quad i = i_1 + i_2$$

$$(2)\quad e_1 = R_1\, i_1 + R' i + L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$(3)\quad e_2 = R_1\, i_2 + R' i + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Posons, puisque le décalage doit être exactement de $\frac{\pi}{2}$ et les intensités maxima des courants égales :

$$i = X \sin (kt + \varphi)$$

$$i_1 = X_1 \sin (kt + \varphi_1)$$

$$i_2 = X_1 \sin \left(kt + \frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$$

L'équation (1) devient :

$$X \sin (kt + \varphi) = X_1 \left\{ \sin (kt + \varphi_1) + \sin \left(kt + \frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) \right\}$$

en faisant successivement : $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, nous aurons :

$$X \sin \varphi = X_1 \left\{ \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \right\}$$

$$X \cos \varphi = X_1 \left\{ \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \right\}$$

L'équation (2) devient :

$$E \sin kt = R_1\, X_1 \sin (kt + \varphi_1) + k\, L_1\, X_1 \cos (kt + \varphi_1) + R' X \sin (kt + \varphi)$$

En faisant $kt = o$ et en remplaçant X sin φ par la valeur trouvée ci-dessus, nous aurons :

$$R_1 X_1 \sin \varphi_1 + k L_1 X_1 \cos \varphi_1 + R' X_1 \sin \varphi_1 + R' X_1 \cos \varphi_1 = o$$

$$\sin \varphi_1 (R' + R_1) + \cos \varphi_1 (R' + k L_1) = o$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = - \frac{R' + k L_1}{R' + R_1}$$

L'équation (3) devient :

$$E \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) = R_1 X_1 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) + k L_2 X_1 \cos\left(kt + \frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) + R' X \sin(kt + \varphi)$$

En faisant $kt = \frac{\pi}{2}$ nous aurons :

$$- R_1 X_1 \sin \varphi_1 - k L_2 X_1 \cos \varphi_1 + R' X_1 \cos \varphi_1 - R' X_1 \sin \varphi_1 = o$$

$$- \sin \varphi_1 (R + R_2) + \cos \varphi_1 \left\{ R' - k L_2 \right\} = o$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R' - k L_2}{R' + R_1}$$

Les deux valeurs de $\operatorname{tg} \varphi_1$ devant être égales, nous devons donc avoir :

$$- (R' + k L_1) = R' - k L_2$$

$$k (L_2 - L_1) = 2 R'$$

On aura, en élevant au carré, les relations donnant les valeurs de X sin φ et X cos φ et en les additionnant :

$$X^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = X_1^2 \left\{ \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 + 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 - 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \right\}$$

$$X^2 = 2 X_1^2$$

$$X = \sqrt{2}\, X_1$$

En divisant la première de ces deux relations par la seconde, nous aurons :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi_1 + \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 - \sin \varphi_1} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi_1}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1}$$

C. *Force électromotrice unique appliquée à un circuit unique.*

Les deux circuits des moteurs peuvent être placés :

1° Chacun sur une dérivation du courant principal (moteur Tesla, dans lequel, les dérivations ont des constantes de temps très différentes, moteur Hutin et Leblanc auec emploi de condensateurs).

2° L'un sur le circuit dans lequel agit la f. e. m. et l'autre sur un circuit induit (moteur Ferraris, compteur Schallenberg).

3° L'un dans le premier secondaire et l'autre dans le deuxième secondaire d'un transformateur.

4° L'un dans le premier circuit d'un condensateur transformateur, l'autre dans le deuxième.

Nous avons vu, page 103, que si, r_1 et r_2 représentent respectivement les résistances de deux circuits dérivés, L_1 et L_2, leurs coefficients de s. i., M, leur coefficient d'induction mutuelle (L_1, L_2, M étant supposés constants), c_1 et c_2 les capacités de condensateurs intercalés dans ces dérivations : $i = I \sin kt$, $i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$, $i_2 = X_2 \sin (kt - \varphi_2)$, les valeurs instantanées des intensités des courants du circuit principal et des deux dérivations, en posant :

$$\lambda_1 = L_1 - \frac{1}{k^2 c_1}, \qquad \lambda_2 = L_2 - \frac{1}{k^2 c_2}$$

on a :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = k \frac{r_2 (\lambda_1 + \lambda_2 - 2M) + (r_1 + r_2)(M - \lambda_2)}{r_2 (r_1 + r_2) - k^2 (M - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2M)}$$

$$X_1^2 = \frac{r_2^2 + k^2 (M - \lambda_2)^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2 - 2M)^2} I^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = k \frac{r_1 (\lambda_1 + \lambda_2 - 2M) + (r_1 + r_2)(M - \lambda_1)}{r_1 (r_1 + r_2) - k^2 (M - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2 - 2M)}$$

$$X_2^2 = \frac{r_1^2 + k^2 (M - \lambda_1)^2}{(r_1 + r_2)^2 + k^2 (\lambda_1 + \lambda_2 - 2M)^2} I^2$$

La différence de phase ou le décalage des courants dans les circuits dérivés sera :

$\varphi_1 - \varphi_2$,

or, on a :

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$$

Pour que le décalage des deux courants dérivés soit $\frac{\pi}{2}$, il faut que le dénominateur soit égal à zéro, car le numérateur ne peut être infini.

On devra donc avoir :

$$1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = o$$

En posant pour simplifier :

$$\lambda_1 + \lambda_2 - M = a. \qquad M - \lambda_1 = b\,; \qquad M - \lambda_2 = d$$

on aura :

$$1 + k^2 \frac{[ar_2 + d(r_1 + r_2)]\,[ar_1 + b(r_1 + r_2)]}{[r_2(r_1 + r_2) - k^2 ad]\,[r_1(r + r_2) - k^2 ab]} = o$$

$$[r_2(r_1+r_2) - k^2 ad]\,[r_1(r_1+r_2) - k^2 ab] + k^2[ar_2 + d(r_1+r_2)]\,[ar_1 + b(r_1+r_2)] = o$$

$$r_1 r_2 (r_1 + r_2)^2 - k^2 ad\, r_1 (r_1 + r_2) - k^2 ab\, r_2 (r_1 + r_2) + k^4 a^2 bd + k^2 a^2 r_1 r_2$$

$$k^2 abr_2 (r_1 + r_2) + k^2 adr_1 (r_1 + r_2) + k^2 b\, d\, (r_1 + r_2)^2 = o$$

$$\left\{ (r_1 + r_2)^2 + k^2 a^2 \right\} \left\{ r_1 r_2 + k^2 bd \right\} = o$$

Le premier facteur étant composé de la somme de deux carrés, ne peut être nul (car r_1 et r_2 ne peuvent jamais être nuls) on doit donc avoir :

$$r_1 r_2 + k^2 b\, d = o$$

$$r_1 r_2 + k^2 (M - \lambda_1)(M - \lambda_2) = o$$

$$r_1 r_2 + k^2 M^2 - k^2 M (\lambda_1 + \lambda_2) + k^2 \lambda_1 \lambda_2 = o$$

Examinons les divers cas particuliers, qui peuvent se présenter :

1° *Les circuits dérivés n'ont pas d'induction mutuelle.*

On a alors :

$$M = o$$

$$r_1 r_2 + k^2 \lambda_1 \lambda_2 = o$$

Si les circuits n'ont pas de capacité on a $\lambda_1 = L_1$, $\lambda_2 = L_2$, et comme L_1 et L_2 sont essentiellement positifs, l'équation ne peut jamais être satisfaite, c'est-à-dire que les deux courants ne peuvent être décalés exactement de 90°.

En calculant la valeur de $tg\ (\varphi_1 - \varphi_2)$ pour ce cas, on a :

$$tg\ (\varphi_1 - \varphi_2) = k\,\frac{r_2 L_1 - r_1 L_2}{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2} = k\,\frac{\dfrac{L_1}{r_1} - \dfrac{L_2}{r_2}}{1 + k^2 \dfrac{L_1}{r_1}\,\dfrac{L_2}{r_2}}$$

Il est facile de voir que la valeur de $tg\ (\varphi_1 - \varphi_2)$ sera d'autant plus grande, c'est-à-dire que $\varphi_1 - \varphi_2$, se rapprochera d'autant plus de $\frac{\pi}{2}$, que l'on fera par exemple r_2 et L_1 plus grands et r_1 et L_2 plus petits c'est-à-dire que les constantes de temps des deux circuits seront plus différentes.

Si le premier circuit n'a pas de capacité, on a $\lambda_1 = L_1$, si L_2 est le coefficient de s. i. du deuxième circuit, cherchons la capacité c_2 du condensateur à y intercaler pour obtenir un décalage égal à $\frac{\pi}{2}$.

$$\lambda_2 = L_2 - \frac{1}{k^2 c_2} = -\frac{r_1 r_2}{k^2 L_1}$$

$$\frac{1}{k^2 c_2} = \frac{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2}{k^2 L_1}$$

$$c_2 = \frac{L_1}{r_1 r_2 + k^2 L_1 L_2}$$

2° *Les circuits dérivés ont de l'induction mutuelle, mais pas de capacité.*

On a :

$$\lambda_1 = L_1 \qquad \lambda_2 = L_2$$

On devra avoir :

$$r_1 r_2 + k^2 M^2 - k^2 M (L_1 + L_2) + k^2 L_1 L_2 = o$$

Si on a comme données r_1, r_2, M et L_1 on devra prendre :

$$L_2 = \frac{r_1 r_2 + k^2 M^2 - k^2 M L_1}{k^2 (M - L_1)}$$

Les nombres de spires de chacun des circuits, à enrouler sur les inducteurs du moteur, pour obtenir un champ tournant d'intensité constante, seront inversement proportionnels aux intensités efficaces des courants dérivés, c'est-à-dire X_1 et à X_2, que les équations de la page 103 permettront de calculer.

Si l'un des inducteurs *est placé dans le circuit primaire et l'autre dans le circuit secondaire, d'un transformateur*, on aura page 87

Pour le courant du primaire :

$$i_1 = I_1 \sin kt$$

Pour le courant du secondaire :

$$i_2 = X_2 \sin (kt - \varphi_2)$$

L'angle de décalage sera donné par la relation :

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = - \frac{r_2}{k \lambda_2}$$

Il faudra, pour que le décalage soit égal à $\frac{\pi}{2}$, avoir :

$$\lambda_2 = L_2 - \frac{1}{k^2 c_2} = o$$

$$L_2 = \frac{1}{k^2 c_2}$$

Si le circuit secondaire n'a pas de capacité, on ne pourra pas obtenir un décalage de $\frac{\pi}{2}$, on s'en approchera d'autant plus que L_2 sera plus grand.

Les nombres de spires à enrouler sur les inducteurs du moteur sont inversement proportionnels à I_1 et à X_2, la valeur de X_2 pourra être calculée au moyen de la relation donnée page 87.

Si $\lambda_2 = o$, on aura :

$$X_2 = \frac{k\,M}{r_2}\,I_1.$$

Si les deux circuits sont placés *dans les secondaires d'un transformateur à double circuit secondaire* (voir page 100), en multipliant l'équation 2 par M_2 et en retranchant l'équation 3 multipliée par M_1, on aura :

$$r_1 M_2 X_1 \sin(kt-\varphi_1) + k(M_2\lambda_1 - MM_1) X_1 \cos(kt-\varphi_1) - r_2 M_1 X_2 \sin(kt-\varphi_2) + k(MM_2 - M_1\lambda_2) X_2 \cos(kt-\varphi_2) = o$$

Si les deux courants sont décalés de $\frac{\pi}{2}$, on aura :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(kt-\varphi_2) = \sin\left(kt-\varphi_1-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(kt-\varphi_1)$$

$$\cos(kt-\varphi_1) = \cos\left(kt-\varphi_1-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(kt-\varphi_1)$$

L'équation deviendra :

$$[r_1 M_2 X_1 + k(MM_2 - M_1\lambda_2) X_2] \sin(kt-\varphi_1) + [r_2 M_1 X_2 + k(M_2\lambda_1 - MM_1) X_1] \cos(kt-\varphi_1) = o$$

Comme cette équation doit être satisfaite pour toutes les valeurs, de kt, on devra avoir :

$$r_1 M_2 X_1 + k(MM_2 - M_1\lambda_2) X_2 = o$$

$$r_2 M_1 X_2 + k (M_2 \lambda_1 - MM_1) X_1 = o$$

$$\frac{X_1}{X_2} = - k \frac{MM_2 - M_1\lambda_2}{r_1 M_2} = - \frac{1}{k} \frac{r_2 M_1}{M_2 \lambda_1 - MM_1}$$

L'équation de condition pour que les deux courants soient décalés de $\frac{\pi}{2}$, sera donc :

$$k^2 (MM_2 - M_1\lambda_2)(M_2 \lambda_1 - MM_1) = r_1 r_2 M_1 M_2$$

Cette disposition qui n'a pas encore été réalisée, peut servir dans le cas où l'on emploie sur la ligne une f. e. m. très élevée.

On peut également se servir du *condensateur transformateur* (fig. 18, page 78) l'un des circuits étant parcouru par le courant $i = I \sin kt$, l'autre par le courant $i_1 = X_1 \sin (kt - \varphi_1)$.

Nous avons, page 61 :

$$tg\ \varphi_1 = k \frac{r_2 \lambda_1 - r_1 \lambda_2}{r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}$$

équation dans laquelle, comme il est indiqué à la page 78, il faut faire :

$$r_2 = o \qquad r_1 = r \qquad \lambda_1 = l \qquad \lambda_2 = - \frac{1}{k^2 c}$$

Pour que les deux courants soient décalés de $\frac{\pi}{2}$, il faut avoir $tg\ \varphi_1 = \pm \infty$, ou :

$$r_2 (r_1 + r_2) + k^2 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) = - \frac{k^2}{k^2 c} \left(l - \frac{1}{k^2 c} \right) = o$$

$$l = \frac{1}{k^2 c}$$

3° *Courants de la deuxième catégorie* (triphasés).

Les trois forces électromotrices appliquées, sont :

$$e_1 = E \sin kt$$

$$e_2 = E \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_3 = E \sin\left(kt + \frac{4\pi}{3}\right)$$

On a toujours $e_1 + e_2 + e_3 = o$

a. Montage en double étoile (fig. 48).

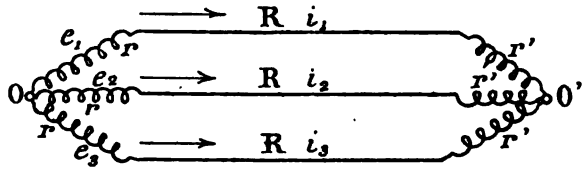


Fig. 48.

On a, en posant $R_1 = r + r' + R$.

$$i_1 = \frac{e_1}{R_1} = \frac{E}{R_1} \sin kt$$

$$i_2 = \frac{e_2}{R_1} = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_3 = \frac{e_3}{R_1} = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Les courants seront donc décalés comme les f. e. m. appliquées.

En enroulant en sens contraire, chaque circuit sur deux bobines (ou cadres). On peut considérer que l'une de ces dernières est parcourue par un courant i et l'autre par un courant $-i$.

$$i'_1 = -i_1 = -\frac{E}{R_1} \sin kt = \frac{E}{R_1} \sin(kt + \pi) = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{6\pi}{6}\right)$$

$$i'_2 = -i_2 = -\frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{4\pi}{6}\right) = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \pi + \frac{4\pi}{6}\right) = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{10\pi}{6}\right)$$

$$i'_3 = -i_3 = -\frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{8\pi}{6}\right) = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \pi + \frac{8\pi}{6}\right) = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{2\pi}{6}\right)$$

En classant les courants dans l'ordre suivant :

$$i_1 = \frac{E}{R_1} \sin kt$$

$$i'_3 = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{2\pi}{6}\right)$$

$$i_2 = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{4\pi}{6}\right)$$

$$i'_1 = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{6\pi}{6}\right)$$

$$i_3 = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{8\pi}{6}\right)$$

$$i'_2 = \frac{E}{R_1} \sin\left(kt + \frac{10\pi}{6}\right)$$

On aura six courants décalés de $\frac{2\pi}{6}$ de l'un à l'autre, pouvant engendrer un champ magnétique tournant uniforme.

En augmentant le nombre des bobines, on rend plus constants l'intensité et la vitesse du champ tournant (1).

Comparaison avec le courant monophasé.

Le travail par circuit est :

$$(e_1 i_1)_{moy} = \frac{E^2}{2 R_1}$$

Le travail total développé sera :

$$T_m = \frac{3 E^2}{2 R_1}$$

Un courant monophasé de même f. e. m. maximum E, produisant le même travail devra avoir une intensité efficace :

(1) D'après des expériences faites par MM. Siemens et Halske, la fluctuation d'un champ magnétique tournant engendré par quatre bobines atteignent 13 %, tandis que celles d'un champ engendré par six bobines peuvent être considérées comme à peu près nulles (Communication de M. de Chasseloup-Laubat à la Société des Ingénieurs civils).

$$I_{eff} = \frac{3\,E\,\sqrt{2}}{2\,R_1}$$

La perte dans la ligne pour le courant triphasé est :

$$P = \frac{3\,R}{2}\,\frac{E^2}{R_1^2} = 1{,}50\,\frac{R\,E^2}{R_1^2}$$

Si R' est la résistance d'un fil de ligne dans le cas du courant monophasé, la perte dans la ligne sera :

$$P_1 = \frac{2\,R'\,9\,E^2\,2}{4\,R_1} = 9\,\frac{R'\,E^2}{R_1^2}$$

Si s est la section d'un fil dans le cas du courant biphasé, le volume du métal employé sera :

$$V = 3\,l\,s$$

Si s' est la section d'un fil dans le cas du courant monophasé, le volume sera :

$$V = 2\,l\,s'$$

Si on emploie le même volume de métal, dans les deux cas, on aura :

$$3\,s = 2\,s'$$

On aura alors :

$$R = \frac{\rho\,l}{s}$$

$$R' = \frac{\rho\,l}{s'}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{s}{s'} = \frac{2}{3}$$

$$R' = \frac{2\,R}{3}$$

On aura donc :

$$P_1 = 6 \frac{R E^2}{R_1^2}$$

Le rapport des pertes dans la ligne sera donc :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{1,50}{6} = 0,25$$

Le courant triphasé, avec montage en double étoile réalise donc une économie de 75 % sur le courant monophasé, avec le même volume de métal employé pour la ligne.

b. Montage en double triangle (fig. 49).

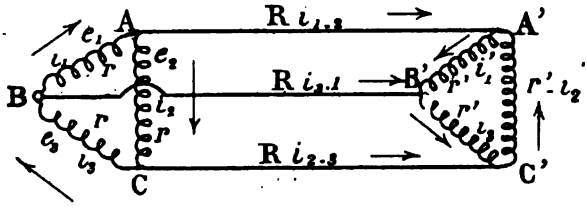


Fig. 49.

En appliquant les lemmes de Kirchhoff, nous aurons :

$$r(i_1 + i_2 + i_3) = e_1 + e_2 + e_3 = o$$
$$i_1 + i_2 + i_3 = o$$

En considérant les circuits, nous aurons :

$$e_1 = ri_1 + R(i_{1\cdot2} - i_{3\cdot1}) + r'i'_1$$
$$e_2 = ri_2 + R(i_{2\cdot3} - i_{1\cdot2}) + r'i'_2$$
$$e_3 = ri_3 + R(i_{3\cdot1} - i_{2\cdot3}) + r'i'_3$$

n additionnant ces trois relations, nous en tirons :

$$i'_1 + i'_2 + i'_3 = o$$

Nous avons :

$$i_{1\cdot2} - i_{3\cdot1} = i_1 - i_2 - i_3 + i_1 = 2i_1 - (i_2 + i_3) = 2i_1 + i_1 = 3i_1$$
$$i_{2\cdot3} - i_{1\cdot2} = i_2 - i_3 - i_1 + i_2 = 2i_2 - (i_1 + i_3) = 2i_2 + i_2 = 3i_2$$
$$i_{3\cdot1} - i_{2\cdot3} = i_3 - i_1 - i_2 + i_3 = 2i_3 - (i_1 + i_2) = 2i_3 + i_3 = 3i_3$$

$$i_{1\cdot2} - i_{3\cdot1} = i'_1 - i'_2 - i'_3 + i'_1 = 2\,i'_1 - (i'_2 + i'_3) = 2\,i'_1 + i'_1 = 3\,i'_1$$

$$i_{2\cdot3} - i_{1\cdot2} = i'_2 - i'_3 - i'_1 + i'_2 = 2\,i'_2 - (i'_1 + i'_3) = 2\,i'_2 + i'_2 = 3\,i'_2$$

$$i_{3\cdot1} - i_{2\cdot3} = i'_3 - i'_1 - i'_2 + i'_3 = 2\,i'_3 - (i_1' + i'_2) = 2\,i'_3 + i'_3 = 3\,i'_3$$

Nous aurons donc :

$$i_1 = i'_1 \qquad i_2 = i'_2 \qquad i_3 = i'_3$$

D'autre part, les trois premières relations ci-dessus nous donnent :

$$e_1 = i'_1\,(r + r' + 3\,R) = R'i'_1 = R'i_1$$

$$e_2 = i'_2\,(r + r' + 3\,R) = R'i'_2 = R'i_2$$

$$e_3 = i'_3\,(r + r' + 3\,R) = R'i'_3 = R'i_3$$

D'où :

$$i'_1 = i_1 = \frac{E}{R'} \sin kt$$

$$i'_2 = i_2 = \frac{E}{R'} \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i'_3 = i_3 = \frac{E}{R'} \sin\left(kt + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Les courants auront donc même intensité maximum et seront décalés de $\frac{2\pi}{3}$ **de l'une à l'autre, d'autre part nous avons :**

$$i_{1\cdot2} = i_1 - i_2 = \frac{E}{R'}\left\{\sin kt - \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$i_{2\cdot3} = i_2 - i_3 = \frac{E}{R'}\left\{\sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(kt + \frac{4\pi}{3}\right)\right\}$$

$$i_{3\cdot1} = i_3 - i_1 = \frac{E}{R'}\left\{\sin\left(kt + \frac{4\pi}{3}\right) - \sin kt\right\}$$

On voit que les courants $i_{1\cdot2}$, $i_{2\cdot3}$ et $i_{3\cdot1}$ ont même intensité maximum et sont décalés de $\frac{2\pi}{3}$ l'un par rapport à l'autre. Posons :

$$i_{1\cdot2} = X \sin(kt - \varphi) = \frac{E}{R'}\left\{\sin kt - \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

en faisant successivement :

$$kt = o \quad \text{et} \quad kt = \frac{\pi}{2}$$

Nous aurons :

$$-\,X \sin \varphi = -\,\frac{E}{R'} \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$X \sin \varphi = \frac{E}{R'} \sin \frac{2\pi}{3} = 0{,}866\,\frac{E}{R'}$$

$$X \cos \varphi = \frac{E}{R'}\left(1 - \sin \frac{7\pi}{6}\right) = \frac{E}{R'}\left(1 + \sin \frac{\pi}{6}\right) = 1{,}50\,\frac{E}{R'}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0{,}866}{1{,}50} = 0{,}578 \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$X^2 = \frac{E^2}{R'^2}\left(\overline{0{,}866}^2 + \overline{1{,}50}^2\right) = (0{,}75 + 2{,}25)\,\frac{E^2}{R'^2} = 3\,\frac{E^2}{R'^2}$$

$$X = 1{,}73\,\frac{E}{R'}$$

Nous aurons donc :

$$i_{1\cdot 2} = 1{,}73\,\frac{E}{R'} \sin\left(kt - \frac{\pi}{6}\right) = 1{,}73\,\frac{E}{R'} \sin\left(kt + \frac{11\pi}{6}\right)$$

En procédant de la même manière, nous aurons :

$$i_{2\cdot 3} = 1{,}73\,\frac{E}{R'} \sin\left(kt + \frac{3\pi}{6}\right)$$

$$i_{3\cdot 1} = 1{,}73\,\frac{E}{R'} \sin\left(kt + \frac{7\pi}{6}\right)$$

En enroulant chacun des circuits i'_1, i'_2, i'_3 en sens inverse sur deux bobines, comme nous l'avons fait précédemment, et en procédant de même pour les circuits $i_{1\cdot 2}$, $i_{2\cdot 3}$, $i_{3\cdot 1}$, mais en disposant sur les bobines 1,73 fois moins de spires que sur les précédentes, nous obtiendrons douze bobines traversées par des courants décalés de $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{12}$, ces bobines seront disposées dans l'ordre suivant :

$$\left(\text{en posant}\quad A = \frac{E}{R'}\qquad B = 1{,}73\,\frac{E}{R'}\right)$$

1° traversée par le courant $i'_1 = A \sin kt$

2° » » $-i_{2\cdot 4} = B \sin\left(kt + \frac{2\pi}{12}\right)$

3° » » $-i'_3 = A \sin\left(kt + \frac{4\pi}{12}\right)$

4° » » $i_{2\cdot 3} = B \sin\left(kt + \frac{6\pi}{12}\right)$

5° » » $i'_2 = A \sin\left(kt + \frac{8\pi}{12}\right)$

6° » » $-i_{1\cdot 2} = B \sin\left(kt + \frac{10\pi}{12}\right)$

7° » » $-i'_4 = A \sin\left(kt + \frac{12\pi}{12}\right)$

8° » » $i_{3\cdot 1} = B \sin\left(kt + \frac{14\pi}{12}\right)$

9° » » $i'_3 = A \sin\left(kt + \frac{16\pi}{12}\right)$

10° » » $-i_{2\cdot 3} = B \sin\left(kt + \frac{18\pi}{12}\right)$

11° » » $-i'_2 = A \sin\left(kt + \frac{20\pi}{12}\right)$

12° » » $i_{1\cdot 2} = B \sin\left(kt + \frac{22\pi}{12}\right)$

Cette disposition a été adoptée par M. Von Dolivo-Dobrowolski, pour les inducteurs à anneau de ses moteurs à champ tournant, comme nous le verrons.

Comparaison avec le courant monophasé.

Le travail moyen developpé dans un des circuits A, B, C, est :

$$(e, i,) = \frac{E^2}{2\,R'}$$

et le travail total :

$$T_m = \frac{3\,E^2}{2\,R'} = \frac{1{,}50\,E^2}{r + r' + 3\,R}$$

Uu courant monophasé, produisant le même travail avec la même f. e. m. maximum, devra avoir une intensité efficace.

$$\frac{1{,}50\,E\,\sqrt{2}}{R'} = \frac{1{,}50\,\sqrt{2}\,E}{r + r' + 3R}$$

La perte de travail dans la ligne pour le courant triphasé est :

$$P = 3\,R\,(i_{1,\,eff})^2$$

$$P = 3\,R\,\frac{3\,E^2}{2\,R'^2} = 4{,}50\,\frac{RE^2}{R'^2}$$

Si R" est la résistance de la ligne, pour le courant monophasé, on aura :

$$P_1 = 2\,R''\,\frac{(1{,}50)^2\,2\,E^2}{R''^2} = 9\,R''\,\frac{E^2}{R'^2}$$

Si on emploie le même volume de métal dans les deux cas, on aura comme précédemment (page 181) :

$$R'' = \frac{2\,R}{3}$$

$$P_1 = 6\,R\,\frac{E^2}{R'^2}$$

Le rapport des pertes dans les lignes sera :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{4{,}50}{6} = 0{,}75$$

Le courant triphasé, avec montage en double triangle, réalise donc une économie de 25 % sur le courant monophasé pour le même volume de métal employé pour la ligne.

c. Montage en étoile et triangle (fig. 50).

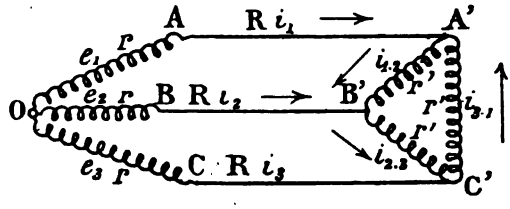


Fig. 50.

En appliquant les lemmes de Kirchhoff, nous aurons :

$$(1) \quad e_1 - e_2 = (R + r)(i_1 - i_2) + r' i_{1\cdot 2}$$

$$(2) \quad e_2 - e_3 = (R + r)(i_2 - i_3) + r' i_{2\cdot 3}$$

$$(3) \quad e_3 - e_1 = (R + r)(i_3 - i_1) + r' i_{3\cdot 1}$$

En additionnant ces trois relations, nous aurons :

$$(4) \quad i_{1\cdot 2} + i_{2\cdot 3} + i_{3\cdot 1} = o$$

$$(5) \quad i_{1\cdot 2} - i_{3\cdot 1} = i_1$$

$$(6) \quad i_{2\cdot 3} - i_{1\cdot 2} = i_2$$

$$(7) \quad i_{3\cdot 1} - i_{2\cdot 3} = i_3$$

En additionnant les relations 5, 6 et 7, nous aurons :

$$(8) \quad i_1 + i_2 + i_3 = o$$

En retranchant l'équation 6, de l'équation 5, nous aurons :

$$i_{1\cdot 2} - i_{3\cdot 1} - i_{2\cdot 3} + i_{1\cdot 2} = i_1 - i_2$$

$$2\, i_{1\cdot 2} - (i_{2\cdot 3} + i_{3\cdot 1}) = i_1 - i_2$$

$$(9) \quad 3\, i_{1\cdot 2} = i_1 - i_2$$

En opérant de même sur les autres équations, nous aurons :

$$(10) \quad 3\, i_{2\cdot 3} = i_2 - i_3$$

$$(11) \quad 3\, i_{3\cdot 1} = i_3 - i_1$$

En portant dans l'équation 1, la valeur de $i_1 - i_2 = 3\, i_{1\cdot 2}$, nous aurons :

$$3(R + r)\, i_{1\cdot 2} + r' i_{1\cdot 2} = e_1 - e_2$$

$$e_1 - e_2 = (3r + 3R + r')\, i_{1\cdot 2} = R' i_{1\cdot 2}$$

$$i_{1\cdot 2} = \frac{e_1 - e_2}{R'} = \frac{E}{R'} \left\{ \sin kt - \sin\left(kl + \frac{2\pi}{3}\right) \right\}$$

En posant :

$$i_{1\cdot 2} = X \sin (kt - \varphi)$$

et :

$$\frac{E}{3r + 3R + r'} = \frac{E}{R'} = A,$$

nous aurons :

$$X \sin (kt - \varphi) = A \left\{ \sin kt - \sin \left(kt + \frac{2\pi}{3} \right) \right.$$

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, nous aurons,

$$- X \sin \varphi = - A \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$X \sin \varphi = 0{,}866\ A$$

$$X \cos \varphi = A - A \cos \frac{2\pi}{3} = 1{,}50\ A$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 0{,}578 \qquad \varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$X^2 = A^2 \left(\overline{0{,}866}^2 + \overline{1{,}50}^2\right) = 3A^2$$

$$X = 1{,}73 \frac{E}{R'} = \frac{1{,}73\ E}{3r + 3R + r'}$$

Nous aurons donc :

$$i_{1\cdot 2} = \frac{e_1 - e_2}{R'} = \frac{1{,}73\ E}{3r + 3R + r'} \sin \left(kt - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$i_{2\cdot 3} = \frac{e_2 - e_3}{R'} = \frac{1{,}73\ E}{3r + 3R + r'} \sin \left(kt + \frac{3\pi}{6} \right)$$

$$i_{3\cdot 1} = \frac{e_3 - e_1}{R'} = \frac{1{,}73\ E}{3r + 3R + r'} \sin \left(kt + \frac{7\pi}{6} \right)$$

Les trois courants seront donc décalés de $\frac{2\pi}{3}$ l'un par rapport à l'autre.

L'équation (5) :

$$i_1 = i_{1\cdot 2} - i_{3\cdot 1}$$

nous donne :

$$i_1 = \frac{e_1 - e_2}{R'} - \frac{e_3 - e_1}{R'}$$

$$i_1 = \frac{2\,e_1 - (e_2 + e)}{R'} = \frac{3\,e_1}{R'}$$

$$i_1 = \frac{3\,E}{3r + 3\,R + r'} \sin kt$$

En procédant de même, on aura :

$$i_2 = \frac{3\,e_2}{R'} = \frac{3\,E}{3r + 3\,R + r'} \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_3 = \frac{3\,e_3}{R'} \frac{3\,E}{3r + 3\,R + r'} \sin\left(kt + \frac{4\pi}{3}\right)$$

En enroulant chacun des circuits i_1, i_2, i_3 et $i_{2\cdot 1}$, $i_{3\cdot 2}$ et $i_{3\cdot 1}$ en sens inverse sur deux bobines, on aura encore douze bobines traversées par des courants décalés de $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{12}$, c'est-à-dire, la disposition employée par M. von Dolivo Dobrowolski.

Comparaison avec le courant monophasé.

Le travail développé par chaque f. e. m. sera :

$$(e_1\, i_1)_{moy}$$

$$e_1 = E \sin kt$$

$$i_1 = \frac{3\,E}{3r + 3\,R + r} \sin kt$$

$$(e_1\, i_1)_{moy} = \frac{1}{2} \frac{3\,E^2}{3r + 3\,R + r'}$$

Le travail moyen total développé sera :

$$T_m = \frac{9}{2} \frac{E^2}{3r + 3R + r'} = 4{,}50 \frac{E^2}{R'}$$

Un courant monophasé dû à une f. e. m. de même valeur maximum E, devra avoir, pour produire le même travail, une intensité efficace :

$$I_{effic} = \frac{9\sqrt{2}E}{2R'}$$

La perte de travail dans la ligne, pour le courant triphasé sera :

$$P = \frac{27R}{2} \frac{E^2}{R'^2} = \frac{13{,}50RE^2}{R'^2}$$

La perte dans la ligne, pour le courant monophasé, sera, si la résistance d'un des conducteurs est R".

$$P_1 = \frac{81R''E^2}{R'^2}$$

Si les deux lignes ont le même volume de métal, on a :

$$R' = \frac{2}{3}R \text{ (page 181)}$$

$$P_1 = \frac{54RE^2}{R'^2}$$

Le rapport des pertes de travail sera :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{13{,}50}{54} = 0{,}25$$

L'économie sera donc de 75 % par rapport au courant monophasé.

d. Montage en triangle et étoile (fig. 51).

En appliquant les lemmes de Kirchhoff, nous aurons :

(1) $$i_2 - i_1 = i_{1.2}$$

(2) $$i_3 - i_2 = i_{2.3}$$

(3) $$i_1 - i_3 = i_{3\cdot1}$$

$$r\,(i_1 + i_2 + i_3) = e_1 + e_2 + e_3 = o$$

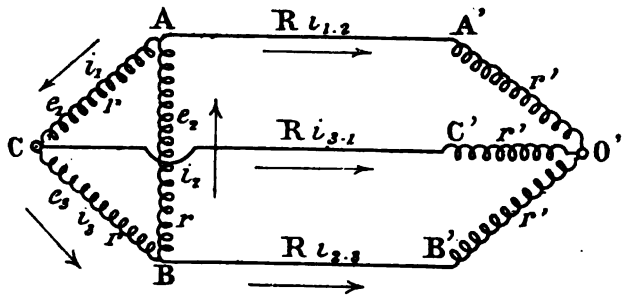


Fig. 51.

d'où :

(4) $$i_1 + i_2 + i_3 = o$$

(5) $$i_{1\cdot2} + i_{2\cdot3} + i_{3\cdot1} = o$$

En retranchant 1 de 3, nous aurons :

$$i_1 - i_3 - i_2 + i_1 = i_{3\cdot1} - i_{1\cdot2}$$

(6) $$i_{3\cdot1} - i_{1\cdot2} = 2\,i_1 - (i_2 + i_3) = 3\,i_1$$

En retranchant 2 de 1, nous aurons :

$$i_2 - i_1 - i_3 + i_2 = i_{1\cdot2} - i_{2\cdot3}$$

(7) $$i_{1\cdot2} - i_{2\cdot3} = 3i_2$$

En retranchant 3 de 2 :

$$i_3 - i_2 - i_1 + i_3 = i_{2\cdot3} - i_{3\cdot1}$$

(8) $$i_{2\cdot3} - i_{3\cdot1} = 3\,i_3$$

En considérant les circuits, nous aurons :

$$e_1 = ri_1 + (R + r')\,(i_{3\cdot1} - i_{1\cdot2}) = (r + 3\,R + 3\,r')\,i_1$$
$$e_2 = ri_2 + (R + r')\,(i_{1\cdot2} - i_{2\cdot3}) = (r + 3\,R + 3\,r')\,i_2$$
$$e_3 = ri_3 + (R + r')\,(i_{2\cdot3} - i_{3\cdot1}) = (r + 3\,R + 3\,r')\,i_3$$

$$i_1 = \frac{E}{r + 3R + 3r'} = \frac{E}{R'} \sin kt$$

$$i_2 = \frac{E}{R'} \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_3 = \frac{E}{R'} \sin\left(kt + \frac{4\pi}{3}\right)$$

De l'équation (1), nous tirons :

$$i_{1,2} = X \sin(kt - \varphi) = \frac{E}{R'}\left\{\sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin kt\right\}$$

En faisant $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, nous aurons :

$$-X \sin\varphi = \frac{E}{R'} \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$X \cos\varphi = \frac{E}{R'} \cos\frac{2\pi}{3} - \frac{E}{R'}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin 120° = \sin 60° = 0{,}866$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos 120° = -\sin 30° = -0{,}50$$

$$X \sin\varphi = -0{,}866\,\frac{E}{R'}$$

$$X \cos\varphi = -1{,}50\,\frac{E}{R'}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0{,}866}{1{,}50} = 0{,}578 \qquad \varphi = \pi + 30° = \frac{7\pi}{6}$$

$$X = 1{,}73\,\frac{E}{R'}$$

Nous aurons donc :

$$i_{1,2} = 1{,}73\,\frac{E}{R'} \sin\left(kt - \frac{7\pi}{6}\right) = 1{,}73\,\frac{E}{R'} \sin\left(kt + \frac{5\pi}{6}\right)$$

En procédant de la même manière, nous aurons :

$$i_{2.3} = \frac{1{,}73\ E}{R'} \sin\left(kt + \frac{9\pi}{6}\right)$$

$$i_{3.1} = \frac{1{,}73\ E}{R'} \sin\left(kt + \frac{\pi}{6}\right)$$

Comparaison avec le courant monophasé.

Le travail développé par chaque f. e. m. est :

$$(e_1\, i_1)_{moy} \qquad e_1 = E \sin kt$$

$$i_1 = \frac{E}{R'} \sin kt$$

$$(e_1\, i_1)_{moy} = \frac{E^2}{2R'}$$

Le travail moyen total développé est :

$$T_m = \frac{3E^2}{2R'}$$

Le courant monophasé donnant le même travail avec une f. e. m. de même valeur maximum, aura une intensité efficace.

$$I_{eff} = \frac{3E}{\sqrt{2}\,R'}$$

La perte dans la ligne, pour le cas du courant triphasé est :

$$P = 3\ R\ (i_{1.2eff})^2 = 3R\,\frac{3E^2}{2R'^2} = 4{,}50\ R\ \frac{E^2}{R'^2}$$

Dans le cas du courant monophasé, si la résistance d'un des conducteurs est R", la perte sera :

$$P_1 = \frac{2R''\ 9E^2}{2R'^2} = 9\ R''\ \frac{E^2}{R'^2}$$

Pour le même volume de métal employé pour la ligne, on doit avoir (page 181) :

$$R'' = \frac{2}{8} R$$

$$P_1 = \frac{2 . 9 R E^2}{8 R''^2} = \frac{6 R E^2}{R''^2}$$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{4,50}{6} = 0,75$$

L'économie sera donc de 25 % dans le cas du courant triphasé.

4° *Conclusion.*

Nous avons trouvé que la perte dans la ligne, par rapport à celle donnée par un courant monophasé, dû à une f. e. m. de même intensité maximum, pour un poids égal de métal employé est de :

100 % pour le courant biphasé avec deux fils de retour;
73 % (environ) — avec fil de retour commun;
25 % pour le courant triphasé dans le cas du montage en double étoile;
75 % pour le courant triphasé dans le cas du montage en double triangle;
25 % pour le courant triphasé dans le cas du montage en étoile et triangle;
75 % pour le courant triphasé dans le cas du montage en triangle et étoile.

Dans les calculs, nous ne nous sommes pas occupés de la tension sur la ligne.

Dans le cas du courant monophasé, la tension maximum entre les deux fils de ligne est égale à la tension maximum de la source, mais il n'en est pas toujours de même dans le cas des courants polyphasés où la tension en ligne peut être notablement supérieure à la f. e. m. appliquée maximum. Dans le cas où on ne veut pas dépasser en ligne une tension, donnée, il faudra pour certains montages des lignes à courants polyphasés, diminuer la f. e. m. maximum appliquée et par conséquent augmenter dans la même proportion l'intensité efficace des courants, ce qui pour le

même volume de métal employé pour la ligne augmentera la perte dans celle-ci, nous allons examiner cette question plus en détail.

Dans les cas suivants, les tensions sur la ligne sont au maximum égales à E.

a. Courants biphasés avec lignes indépendantes (fig. 46);

b. Courants triphasés, montage en double étoile (fig. 48);

c. Courants triphasés, montage en étoile et triangle (fig. 50).

Nous devons examiner les autres cas.

d. Courants biphasés avec fil de retour unique (fig. 47).

La tension aux bornes du fil de retour est égale à :

$$e_1 + e_2$$

nous avons trouvé, page 162 :

$$e_1 + e_2 = (R_1 + 2R')\, i = E\sqrt{2}\sin\left(kt + \frac{\pi}{4}\right)$$

La tension maximum sera $E\sqrt{2}$.

Si on ne veut pas dépasser pour la ligne la tension E, il faudra développer une tension maximum $\frac{E}{\sqrt{2}}$ dans le circuit générateur, l'intensité efficace des courants sera multipliée par $\sqrt{2}$, pour avoir le même travail, de sorte que les pertes dans les lignes qui sont proportionnelles aux carrés des intensités efficaces, seront doublées pour les mêmes résistances.

Pour le même volume de cuivre, employé pour la ligne, on aura une perte de $2 \times 73 = 146$ % de la perte pour le même travail avec le courant monophasé (avec même tension maximum sur la ligne).

e. Cas du courant triphasé, montage en double triangle (fig. 49).

La tension aux bornes d'un circuit de ligne est $e_1 - e_2$, posons :

$$e_1 - e_2 = X \sin(kt + \varphi)$$

$$X \sin(kt + \varphi) = E \sin kt - E \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Faisons successivement :

$$kt = o \text{ et } kt = \frac{\pi}{2}$$

$$X \sin \varphi = - E \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$X \cos \varphi = E - E \cos \frac{2\pi}{3}$$

Nous aurons donc :

$$X^2 = E^2 \left\{ \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 1 - 2 \cos \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} \right\} \quad 1$$

$$\sin^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} = 1$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ = - \sin 30^\circ = - 0{,}500$$

$$X^2 = E^2 \left\{ 1 + 1 + 1 \right\} = 3E^2$$

$$X = \sqrt{3}\ E.$$

Si on veut ne pas dépasser en ligne la tension E, il faudra développer une tension maximum $\frac{E}{\sqrt{3}}$ pour le même travail, l'intensité efficace sera à multiplier par $\sqrt{3}$, de sorte que les pertes sur la ligne seront 3 fois plus forte pour les mêmes résistances.

Pour le même volume de cuivre employé, pour la ligne, et la même tension dans cette ligne, on aura une perte de $3 \times 75 = 225$ % de la perte pour le même travail, avec le courant monophasé.

e. Cas du courant triphasé, montage en triangle et étoile (fig. 51).

La tension aux bornes d'un circuit de ligne sera $e_1 - e_2$, on arrivera donc aux mêmes conclusions que dans le cas précédent.

5° *Examen du cas où les charges ne sont pas identiques dans les divers circuits.*

Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que du cas où les charges dans les divers circuits, sont toujours identiques, c'est le cas où les circuits alimentent uniquement des moteurs à champ tournant; si l'on veut alimenter en même temps des lampes, la charge peut varier dans les divers circuits.

Nous examinerons successivement, comme l'ont fait MM. L. Rodet et Bousquet dans leur ouvrage sur les courants polyphasés, ouvrage auquel nous empruntons le principe de l'étude suivante, en appliquant notre méthode générale, le cas du montage en étoile et celui du montage en triangle.

Nous supposerons que les appareils récepteurs autres que les moteurs, n'ont pas de s. i., de sorte que les s. i. de tous les circuits sont égales quelle que soit la charge, et que l'on peut au point de vue du calcul des décalages, les négliger. Nous admettrons également que les différences de réaction produites sur les génératrices, par les différences de charge, sont négligeables, c'est-à-dire que nous supposerons qu'entre les circuits on maintient exactement trois f. e. m. de même valeur maximum décalées de $\frac{2\pi}{3}$ de l'une à l'autre, ce qui revient en somme à faire $r = o$.

a. ***Montage des récepteurs en étoile.*** Prenons le cas le plus général, celui où l'on emploie un fil de retour (fig. 52) ; nous pourrons en déduire le cas du montage à trois fils en admettant que la résistance du quatrième fil est infinie.

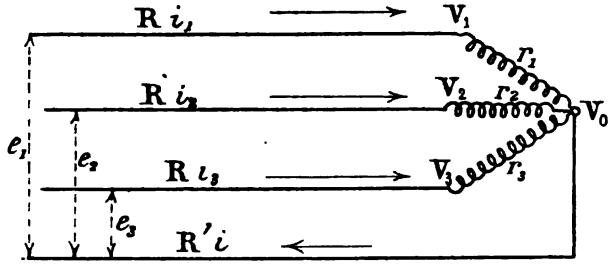


Fig. 52

Faisons successivement :

$$kt = o \text{ et } kt = \frac{\pi}{2}$$

$$X \sin \varphi = - E \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$X \cos \varphi = E - E \cos \frac{2\pi}{3}$$

Nous aurons donc :

$$X^2 = E^2 \left\{ \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 1 - 2 \cos \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} \right\}$$

$$\sin^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{2\pi}{3} = 1$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ = - \sin 30^\circ = - 0.$$

$$X^2 = E^2 \left\{ 1 + 1 + 1 \right\} = 3$$

$$X = \sqrt{3}\ E.$$

Si on veut ne pas dépasser en ligne
développer une tension maximum $\frac{E}{\sqrt{3}}$;
l'intensité efficace sera à multiplier par $\sqrt{3}$.
tes sur la ligne seront 3 fois plus fort
tances.

Pour le même volume de cuivre em
tension dans cette ligne, on aura
la perte pour le même travail, avec

c. Cas du courant triphasé, mon

La tension aux bornes d'un
aussi aux mêmes conclusion

$$\frac{1}{R + r_3} = c$$

$$- c\, r_3\, e_3 + R\, V_o\, (a + b + c)$$

$$= - V_o \frac{R}{R'}$$

$$- (a\, r_1\, e_1 + b\, r_2\, e_2 + c\, r_3\, e_3)$$

$$= - A\, (a\, r_1\, e_1 + b\, r_2\, e_2 + c\, r_3\, e_3)$$

$$\frac{1}{R} \quad \frac{1}{\frac{1}{R'} + a + b + c}$$

$$V_o = X \sin (kt + \varphi)$$

, et e_3 par leurs valeurs, nous aurons :

$$\left. \right\} ar_1 \sin kt + br_2 \sin \left(kt + \frac{2\pi}{3}\right) + cr_3 \sin \left(kt + \frac{4\pi}{3}\right) \Big\}$$

ssivement dans cette équation $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$,

$$\sin \varphi = - AE \left\{ b\, r_2 \sin \frac{2\pi}{3} + c\, r_3 \sin \frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$\varphi = - A\, E \left\{ a\, r_1 + br_2 \cos \frac{2\pi}{3} + c\, r_3 \cos \frac{4\pi}{3} \right\}$$

$120° = 0{,}866$ $\qquad \sin \frac{4\pi}{3} = \sin 240° = - 0{,}866$

$120° = - 0{,}500$ $\qquad \cos \frac{4\pi}{3} = \cos 240° = - 0{,}500$

Soient r_1, r_2, r_3 les résistances des circuits récepteurs, $V_1 - V_0$, $V_2 - V_0$ et $V_3 - V_0$ les différences de potentiel dans ces récepteurs.

En appliquant les lemmes de Kirchhoff, nous avons :

$$i_1 + i_2 + i_3 = i$$
$$V_0 - R'i - (e_1 + e_2 + e_3) = 0$$

et comme :

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

$$V_0 = R'\, i \qquad i = \frac{V_0}{R'}$$

$$e_1 - V_1 = Ri_1 \qquad V_1 - V_0 = r_1\, i_1$$
$$e_2 - V_2 = Ri_2 \qquad V_2 - V_0 = r_2\, i_2$$
$$e_3 - V_3 = Ri_3 \qquad V_3 - V_0 = r_3\, i_3$$

En additionnant, nous aurons :

$$e_1 + e_2 + e_3 - (V_1 + V_2 + V_3) = R\,(i_1 + i_2 + i_3) = R\,i$$

$$-(V_1 + V_2 + V_3) = Ri = V_0 \frac{R}{R'}$$

Nous aurons en outre :

$$i_1 = \frac{e_1 - V_1}{R} = \frac{V_1 - V_2}{r_1} \qquad r_1 e_1 - r_1 V_1 = RV_1 - RV_0$$

$$V_1 = \frac{r_1 e_1 + RV_0}{R + r_1}$$

Nous aurons, par raison de symétrie :

$$V_2 = \frac{r_2 e_2 + RV_0}{R + r_2} \qquad V_3 = \frac{r_3 e_3 + RV_0}{R + r_3}$$

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{r_1 e_1}{R + r_1} + \frac{r_2 e_2}{R + r_2} + \frac{r_3 e_3}{R + r_3} + V_0 R\left(\frac{1}{R + r_1} + \frac{1}{R + r_2} + \frac{1}{R + r_3}\right)$$

Posons, pour simplifier les écritures :

$$\frac{1}{R+r_1}=a \qquad \frac{1}{R+r_2}=b \qquad \frac{1}{R+r_3}=c$$

$$V_1+V_2+V_3=a\,r_1\,e_1+b\,r_2\,e_2+c\,r_3\,e_3+R\,V_o\,(a+b+c)$$

Comme :

$$V_1+V_2+V_3=-V_o\frac{R}{R'}$$

nous aurons :

$$RV_o\left\{\frac{1}{R'}+a+b+c\right\}=-(a\,r_1\,e_1+b\,r_2\,e_2+c\,r_3\,e_3)$$

$$V_o=-\frac{a\,r_1\,e_1+b\,r_2\,e_2+c\,r_3\,e_3}{R\left(\frac{1}{R'}+a+b+c\right)}=-A\,(a\,r_1\,e_1+b\,r_2\,e_2+c\,r_3\,e_3)$$

en posant :

$$A=\frac{1}{R}\,\frac{1}{\frac{1}{R'}+a+b+c}$$

et :

$$V_o=X\sin(kt+\varphi)$$

et en remplaçant e_1, e_2 et e_3 par leurs valeurs, nous aurons :

$$X\sin(kt+\varphi)=-AE\left\{ar_1\sin kt+br_2\sin\left(kt+\frac{2\pi}{3}\right)+cr_3\sin\left(kt+\frac{4\pi}{3}\right)\right\}$$

En faisant successivement dans cette équation $kt=o$ et $kt=\frac{\pi}{2}$, nous aurons :

$$X\sin\varphi=-AE\left\{b\,r_2\sin\frac{2\pi}{3}+c\,r_3\sin\frac{4\pi}{3}\right\}$$

$$X\cos\varphi=-AE\left\{a\,r_1+br_2\cos\frac{2\pi}{3}+c\,r_3\cos\frac{4\pi}{3}\right\}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin 120^\circ=0{,}866 \qquad \sin\frac{4\pi}{3}=\sin 240^\circ=-0{,}866$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos 120^\circ=-0{,}500 \qquad \cos\frac{4\pi}{3}=\cos 240^\circ=-0{,}500$$

$$X \sin \varphi = -0{,}866\ A\ E\ (b\, r_2 - c\, r_3)$$

$$X \cos \varphi = -0{,}500\ A\ E\ (2\, a\, r_1 - b\, r_2 - c\, r_3)$$

Nous aurons donc :

$$\operatorname{tg} \varphi = 1{,}732\ \frac{b\, r_2 - c\, r_3}{2\, a\, r_1 - b\, r_2 - c\, r_3}$$

En élevant les deux équations au carré et en les ajoutant, nous aurons :

$$X^2 = A^2 E^2 \left\{ \overline{0{,}866}^2\ (b^2 r_2^2 + c^2 r_3^2 - 2 b\, c\, r_2\, r_3) + \overline{0{,}500}^2\ (4\, a^2 r_1^2 + b^2 r_2^2 + c^2 r \right.$$

$$\left. - 4\, a\, b\, r_1\, r_2 - 4\, a\, c\, r_1\, r_3 + 2\, b\, c r_2\, r_3) \right\}$$

$$X^2 = A^2\, E^2 \left\{ a^2 r_1^2 + b^2 r_2^2 + c^2 r_3^2 - (a\, b\, r_1 r_2 + a\, c\, r_1 r_3 + b\, c\, r_2\, r_3 \right\}$$

Connaissant X et φ, on peut déterminer les valeurs de V_1, V_2 et V_3, pour cela posons :

$$V_1 = X_1 \sin (kt + \varphi_1)$$

$$V_2 = X_2 \sin (kt + \varphi_2)$$

$$V_3 = X_3 \sin (kt + \varphi_3)$$

Nous avons :

$$V_3 = \frac{r_1 e_1 + R V_o}{R + r_1} = a\ (r_1\, e_1 + R V_o)$$

$$X_1 \sin (kt + \varphi_1) = a \left\{ r_1\, E \sin kt + R\, X \sin (kt + \varphi) \right\}$$

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, nous aurons :

$$X_1 \sin \varphi_1 = a\, R\, X \sin \varphi$$

$$X_1 \cos \varphi_1 = a \left\{ r_1\, E + R\, X \cos \varphi \right\}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R\, X \sin \varphi}{r_1\, E + R\, X \cos \varphi}$$

$$X_1^2 = a^2 \left\{ R^2 X^2 + r_1^2 E^2 + 2 r_1 REX \cos \varphi \right\}$$

Nous aurons également :

$$V_2 = \frac{r_2 e_2 + RV_o}{R + r_2} = b \ (r_2 e_2 + RV_o)$$

$$X_2 \sin (kt + \varphi_2) = b \left\{ r_2 E \sin \left(kt + \frac{2\pi}{3} \right) + R X \sin (kt + \varphi) \right\}$$

En faisant sucessivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, nous aurons :

$$X_2 \sin \varphi_2 = b \left\{ r_2 E \sin \frac{2\pi}{3} + R X \sin \varphi \right\} = b \left\{ 0{,}866 \, r_2 E + R X \sin \varphi \right\}$$

$$X_2 \cos \varphi_2 = b \left\{ r_2 E \cos \frac{2\pi}{3} + R X \cos \varphi \right\} = b \left\{ R X \cos \varphi - 0{,}500 \, r_2 E \right\}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{R X \sin \varphi + 0{,}866 \, r_2 E}{R X \cos \varphi - 0{,}500 \, r_2 E}$$

$$X_2^2 = b^2 \left\{ R^2 X^2 + r_2^2 E^2 + 1{,}732 \, r_2 R E X \sin \varphi - r_2 R E X \cos \varphi \right\}$$

Nous aurons aussi :

$$V_3 = \frac{r_3 e_3 + RV_o}{R + r_3} = c \ (r_3 e_3 + RV_o)$$

$$X_3 \sin (kt + \varphi_3) = c \left\{ r_3 E \sin \left(kt + \frac{4\pi}{3} \right) + R X \sin (kt + \varphi) \right\}$$

En faisant successivement $kt = o$ et $kt = \frac{\pi}{2}$, dans cette équation, nous aurons :

$$X_3 \sin \varphi_3 = c \left(r_3 E \sin \frac{4\pi}{3} + R X \sin \varphi \right) = c \ (R X \sin \varphi - 0{,}866 \, r_3 E)$$

$$X_3 \cos \varphi_3 = c \left(r_3 E \cos \frac{4\pi}{3} + R X \cos \varphi \right) = c \ (R X \cos \varphi - 0{,}500 \, r_3 E)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{R X \sin \varphi - 0{,}866 \, r_3 E}{R X \cos \varphi - 0{,}500 \, r_3 E}$$

$$X_3^2 = c^2 \left\{ R^2 X^2 + r_3^2 E^2 - 1{,}732\, r_3 R E X \sin\varphi - r_3 R E X \cos\varphi \right\}$$

Les décalages seront $\varphi_2 - \varphi_1$ et $\varphi_3 - \varphi_2$, cherchons leurs valeurs :

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\dfrac{R X \sin\varphi + 0{,}866\, r_2 E}{R X \cos\varphi - 0{,}500\, r_2 E} - \dfrac{R X \sin\varphi}{r_1 E + R X \cos\varphi}}{1 + \dfrac{R X \sin\varphi\,(R X \sin\varphi + 0{,}866\, r_2 E)}{(r_1 E + R X \cos\varphi)(R X \cos\varphi - 0{,}500\, r_2 E)}}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{0{,}866\, r_1 r_2 E^2 + R E\,(r_1 + 0{,}500\, r_2) X \sin\varphi + 0{,}866\, r_2 R E X \cos\varphi}{-0{,}500 r_1 r_2 E^2 + R^2 X^2 + 0{,}866 r_2 R E X \sin\varphi + R E (r_1 - 0{,}500 r_2) X \cos\varphi}$$

Nous aurons de même :

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_3 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_3} = \frac{\dfrac{R X \sin\varphi - 0{,}866\, r_3 E}{R X \cos\varphi - 0{,}500\, r_3 E} - \dfrac{R X \sin\varphi + 0{,}866\, r_2 E}{R X \cos\varphi - 0{,}500 r_2 E}}{1 + \dfrac{(R X \sin\varphi - 0{,}866\, r_3 E)(R X \sin\varphi + 0{,}866\, r_2 E)}{(R X \cos\varphi - 0{,}500\, r_3 E)(R X \cos\varphi - 0.500 r_2 E)}}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{0{,}866\, r_2 r_3 E^2 + 0.500\,(r_3 - r_2) R E X \sin\varphi - 0{,}866\,(r_2 + r_3) R E X \cos\varphi}{-0{,}500 r_2 r_3 E^2 + 0{,}866 (r_2 - r_3) R E X \sin\varphi - 0{,}500 (r_2 + r_3) R E X \cos\varphi}$$

Si l'on fait $R' = o$ ce qui revient à relier à la terre les centres des étoiles sans qu'il y ait de résistance de contact, on a, $A = o$ (page 199).

$$X \sin\varphi = o$$

$$X \cos\varphi = o$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = -\frac{0{,}866}{0{,}500} = -1{,}732$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_3 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Nous aurons alors les décalages théoriques.

Le double des carrés des f. e. m. efficaces à l'origine des circuits d'utilisation seront :

$$X_1^2 = a^2 r^2 E^2 = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{R}{r_1}\right)^2} E^2$$

$$X_1^2 = b^2 r_1^2 E^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{r_2}\right)^2} E^2$$

$$X_2^2 = b^2 r_2^2 E^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{r_3}\right)^2} E^2$$

Comme en pratique R est très petit vis à vis de r_1, r_2 et r_3, les f. e. m. efficaces seront à peu de chose près égales.

Comme on ne peut obtenir un circuit sans résistance, en pratique, on pourra chercher la valeur pratique de R', en connaissant les valeurs maxima et minima de r_1, r_2 et r_3, de manière que les décalages diffèrent de ceux théoriques d'un angle donné.

Des équations donnant $tg\ (\varphi_2 - \varphi_1)$, $tg\ (\varphi_3 - \varphi_2)$ et X_1 X_2, X_3 on pourra tirer X sin φ et X cos φ et déterminer R'.

Si le travail est le même, dans les trois circuits, on a :

$$r_1 = r_2 = r_3 = r$$

$$a = b = c = \frac{1}{R+r}$$

Nous aurons alors :

$$b\, r_2 - c\, r_3 = o \qquad X \sin \varphi = o$$

$$2\, a\, r_1 - b\, r_2 - c\, r_3 = o \qquad X \cos \varphi = o$$

$$X = o$$

Il ne passera aucun courant dans le fil de retour, qui sera alors inutile.

Nous aurons en outre :

$$X_1^2 = \frac{r^2 E^2}{(R+r)^2} = X_2^2 = X_3^2$$

Si le fil de retour n'existe pas, il faudra faire dans nos formules R' = ∞, si nous admettons qu'un des circuits de travail n'est pas utilisé, c'est-à-dire que sa résistance est infinie, (dans ce cas aucun moteur ne travaille) et que les résistances des deux autres soient égales, nous aurons :

$$c = \frac{1}{R + r_3} = o \qquad a = b = \frac{1}{R + r}$$

$$A = \frac{1}{2 R a}$$

$$X \sin \varphi = - 0{,}866 \frac{E}{2 R a} a r = - 0{,}866 \frac{r}{2 R} E = - 0{,}433 \frac{r}{R} E$$

$$X \cos \varphi = - 0.500 \frac{E}{2 R a} a r = - 0{,}500 \frac{r}{2 R} E = - 0{,}25 \frac{r}{R} E$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 1{,}732 \qquad \varphi = \frac{4 \pi}{3}$$

(car le sinus et le cosinus sont négatifs).

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R X \sin \varphi}{r_1 E + R X \cos \varphi} = - \frac{0{,}433 r E}{r E - 0{,}25 r E} = - \frac{0{,}433}{0{,}75} = - 0{,}578$$

$$\varphi_1 = \frac{5 \pi}{6}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{R X \sin \varphi + 0{,}866 r E}{R X \cos \varphi - 0{,}500 r E} = \frac{- 0{,}433 r E + 0{,}866 r E}{- 0{,}25 r E - 0{,}500 r E} = - \frac{0{,}433}{0{,}75} = - 0{,}578$$

$$\varphi_2 = \frac{5 \pi}{6}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{R X \sin \varphi - 0{,}866 r_3 E}{R X \cos \varphi - 0{,}500 r_3 E} = \frac{\dfrac{R X \sin \varphi}{r_3} - 0{,}866 E}{\dfrac{R X \cos \varphi}{r_3} - 0{,}500 E}$$

et, puisque $r_3 = o$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{0{,}866}{0{,}500} = 1{,}732$$

$$\varphi_3 = \frac{2 \pi}{6}$$

Les décalages seront donc :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{5 \pi}{6} - \frac{5 \pi}{6} = o$$

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$$

Les décalages sont donc très différents des décalages théoriques ; Dans le cas où les charges sur les trois circuits varient dans de grandes proportions, on ne peut employer le système de montage en étoile avec trois fils seulement, on est obligé pour pouvoir employer des moteurs triphasés de placer un quatrième fil reliant les centres des deux étoiles.

b. ***Montage des récepteurs en triangle*** (fig. 53).

Désignons par V_1, V_2 et V_3 les tensions dans les circuits récepteurs; nous aurons, en appliquant les lemmes de Kirchhoff :

$$e_1 - V_1 - R\,i_{1.2} + R\,i_{3.1} = o$$

$$e_2 - V_2 - R\,i_{2.3} + R\,i_{1.2} = o$$

$$e_3 - V_3 - R\,i_{3.1} + R\,i_{2.3} = o$$

$$V_1 = r_1 i_1 \qquad i_{1.2} = i_1 - i_2$$

$$V_2 = r_2 i_2 \qquad i_{2.3} = i_2 - i_3$$

$$V_3 = r_3 i_3 \qquad i_{3.1} = i_3 - i_1$$

$$i_{1.2} + i_{2.3} + i_{3.1} = o$$

$$e_1 + e_2 + e_3 - (V_1 + V_2 + V_3) = o$$

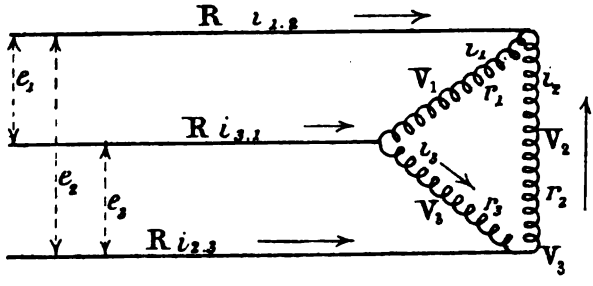


Fig. 53

$$V_1 + V_2 + V_3 = o$$

Les trois premières équations donnent :

$$e_1 - V_1 - R i_1 + R i_2 + R i_3 - R i_4 = o$$

ou :

$$e_1 - V_1 - 2 R i_1 + R i_2 + R i_3 = o$$
$$e_2 - V_2 - 2 R i_2 + R i_1 + R i_3 = o$$
$$e_3 - V_3 - 2 R i_3 + R i_1 + R i_2 = o$$

En remplaçant, dans les deux premières de ces équations, i_1 par

$$\frac{V_1}{r_1} \quad i_2 \text{ par } \frac{V_2}{r_2} \text{ et } i_3 \text{ par } \frac{V_3}{r_3} \text{ ou } -\frac{V_1 + V_2}{r_3}$$

Nous aurons :

$$e_1 - V_1 - \frac{2 R}{r_1} V_1 + R \frac{V_2}{r_2} - R' \frac{V_1 + V_2}{r_3} = o$$

$$(\alpha) \qquad e_1 - V_1 \left(1 + \frac{2 R}{r_1} + \frac{R}{r_1}\right) + V_2 R \left\{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right\} = o$$

$$e_2 - V_2 - 2 R \frac{V_2}{r_2} + R \frac{V_1}{r_1} - R \frac{V_1 + V_2}{r_3} = o$$

$$(\beta) \qquad e_2 + V_1 R \left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}\right\} - V_2 \left\{1 + \frac{2 R}{r_2} + \frac{R}{r_3}\right\} = o$$

Posons :

$$1 + \frac{2 R}{r_1} + \frac{R}{r_3} = a$$

$$1 + \frac{2 R}{r_2} + \frac{R}{r_3} = b$$

$$R \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) = c$$

$$R\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_3}\right)=d$$

Nous aurons :

(α_1) $$e_1 - a\,V_1 + c\,V_2 = o$$

$$e_1 + d\,V_1 - b\,V_2 = o$$

$$b\,e_1 + c\,e_2 - a\,b\,V_1 + c\,d\,V_1 = o \qquad V_1 = \frac{b\,e_1 + c\,e_2}{ab - c\,d}$$

$$d\,e_1 + a\,e_2 - V_2(a\,b - c\,d) = o \qquad V_2 = \frac{d\,e_1 + a\,e_2}{a\,b - c\,d}$$

$$V_3 = -\,V_1 - V_2 = \frac{e_1\,(b+d) + e_2\,(a+c)}{c\,d - a\,b}$$

$$b + d = 1 + \frac{2\,R}{r_2} + \frac{R}{r_3} + \frac{R}{r_1} - \frac{R}{r_3} = 1 + \frac{2\,R}{r_2} + \frac{R}{r_1} = g$$

$$a + c = 1 + \frac{2\,R}{r_1} + \frac{R}{r_3} + \frac{R}{r_2} - \frac{R}{r_3} = 1 + \frac{2\,R}{r_1} + \frac{R}{r_2} = h$$

$$V_3 = \frac{g\,e_1 + h\,e_2}{c\,d - a\,b}$$

Posons :

$$V_1 = X_1 \sin(kt + \varphi_1) = \frac{E}{ab - cd}\left\{ b \sin kt + c \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$V_2 = X_2 \sin(kt + \varphi_2) = \frac{E}{ab - cd}\left\{ d \sin kt + a \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$V_3 = X_3 \sin(kt + \varphi_3) = \frac{E}{cd - ab}\left\{ g \sin kt + h \sin\left(kt + \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

En faisant successivement, dans ces équations, $kt = o$, et $kt = \frac{\pi}{2}$, nous aurons, pour la première :

$$X_1 \sin \varphi_1 = A\,c \sin\frac{2\pi}{3} = A\ 0{,}866\,c$$

$$X_1 \cos \varphi_1 = A\left(b + c \cos \frac{2\pi}{3}\right) = A\ (b - 0{,}500\ c)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{0{,}866\ c}{b - 0{,}500\ c}$$

$$X_1^2 = A^2 \left\{ 0{,}75\ c^2 + b^2 + 0{,}25\ c^2 - bc \right\} = A^2 \left\{ b^2 + c^2 - b\,c \right\}$$

pour la deuxième :

$$X_2 \sin \varphi_2 = A\ a \sin \frac{2\pi}{3} = A\ 0{,}866\ a$$

$$X_2 \cos \varphi_2 = A \left\{ d + a \cos \frac{2\pi}{3} \right\} = A \left\{ d - 0{,}500\ a \right\}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{0{,}866\ a}{d - 0{,}500\ a}$$

$$X_2^2 = A^2 \left\{ a^2 + d^2 - a\,d \right\}$$

pour la troisième, nous aurons :

$$X_3 \sin (kt + \pi + \varphi_3) = A \left\{ g \sin kt + h \sin \left(kt + \frac{2\pi}{3} \right) \right\}$$

$$X_3 \sin (\pi + \varphi_3) = A\ h \sin \frac{2\pi}{3} = A\ 0{,}866\ g$$

$$X_3 \cos (\pi + \varphi_3) = A \left\{ g + h \cos \frac{2\pi}{3} \right\} = A \left\{ g - 0{,}500\ h \right\}$$

$$\operatorname{tg} (\pi + \varphi_3) = \frac{0{,}866\ g}{g - 0{,}500\ h}$$

$$X_3^2 = A^2 \left\{ g^2 + h^2 - g\,h \right\}$$

Comme vérification, faisons : $r_1 = r_2 = r_3$; nous aurons

$$a = b = g = h = \frac{3\,R}{r}$$

$$c = d = o$$

$$A = \frac{E}{\left(\frac{r + 3R}{r}\right)^2} = \frac{E r^2}{(r + 3R)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = o \qquad \varphi_1 = o$$

$$X_1^2 = \frac{E^2 r^4}{(r + 3R)^4} \cdot \frac{(r + 3R)^2}{r^2} = \frac{E^2 r^2}{(r + 3R)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{0{,}866}{0{,}500} = -1.732 \qquad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$X_2^2 = \frac{E^2 r^4}{(r + 3R)^4} \cdot \frac{(r + 3R)^2}{r^2} = \frac{E^2 r^2}{(r + 3R)^2}$$

$$\operatorname{tg} (\pi + \varphi_3) = \frac{0{,}866}{1 - 0{,}500} = 1{,}732$$

$$\pi + \varphi_3 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{E^2 r^4}{(r + 3R)^4} (g^2 + g^2 - g^2) = \frac{E^2 r^4}{(r + 3R)^4} \cdot \frac{(r + 3R)^2}{r^2} = \frac{E^2 r^2}{(r + 3R)^2}$$

efficaces des tensions aux bornes sont toutes égales, et
de $\frac{2\pi}{3}$.

es dans le cas général; c'est-à-dire, $\varphi_2 - \varphi_1$.

$$= \frac{\frac{0{,}866\ a}{d - 0{,}500\ a} - \frac{0{,}866\ c}{b - 0.500\ c}}{1 + \frac{0{,}75\ a\ c}{(d - 0{,}500a)(b - 0{,}500c)}}$$

$$\frac{(ab - cd)}{- 0{,}500\ cd + ac}$$

$$X_1 \cos \varphi_1 = A\left(b + c \cos \frac{2\pi}{3}\right) = A\,(b - 0{,}500\,c)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{0{,}866\,c}{b - 0{,}500\,c}$$

$$X_1^2 = A^2 \left\{ 0{,}75\,c^2 + b^2 + 0{,}25\,c^2 - bc \right\} = A^2 \left\{ b^2 + c^2 - b\,c \right\}$$

pour la deuxième :

$$X_2 \sin \varphi_2 = A\,a \sin \frac{2\pi}{3} = A\ 0{,}866\,a$$

$$X_2 \cos \varphi_2 = A \left\{ d + a \cos \frac{2\pi}{3} \right\} = A \left\{ d - 0{,}500\,a \right\}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{0{,}866\,a}{d - 0{,}500\,a}$$

$$X_2^2 = A^2 \left\{ a^2 + d^2 - a\,d \right\}$$

pour la troisième, nous aurons :

$$X_3 \sin (kt + \pi + \varphi_3) = A \left\{ g \sin kt + h \sin \left(kt + \frac{2\pi}{3} \right) \right\}$$

$$X_3 \sin (\pi + \varphi_3) = A\,h \sin \frac{2\pi}{3} = A\ 0{,}866\,g$$

$$X_3 \cos (\pi + \varphi_3) = A \left\{ g + h \cos \frac{2\pi}{3} \right\} = A \left\{ g - 0.500\,h \right\}$$

$$\operatorname{tg} (\pi + \varphi_3) = \frac{0{,}866\,g}{g - 0{,}500\,h}$$

$$X_3^2 = A^2 \left\{ g^2 + h^2 - g\,h \right\}$$

Comme vérification, faisons : $r_1 = r_2 = r_3$; nous aurons :

$$a = b = g = h = \frac{3\,R}{r}$$

$$c = d = o$$

$$A = \frac{E}{\left(\frac{r + 3R}{r}\right)^2} = \frac{E\,r^2}{(r + 3R)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = o \qquad \varphi_1 = o$$

$$X_1^2 = \frac{E^2 r^4}{(r + 3R)^4} \cdot \frac{(r + 3R)^2}{r^2} = \frac{E^2 r^2}{(r + 3R)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{0{,}866}{0{,}500} = -1.732 \qquad \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$X_2^2 = \frac{E^2 r^4}{(r + 3R)^4} \cdot \frac{(r + 3R)^2}{r^2} = \frac{E^2 r^2}{(r + 3R)^2}$$

$$\operatorname{tg} (\pi + \varphi_3) = \frac{0{,}866}{1 - 0{,}500} = 1{,}732$$

$$\pi + \varphi_3 = 60° = \frac{\pi}{3}$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$X_3^2 = \frac{E^2 r^4}{(r + 3R)^4} \cdot (g^2 + g^2 - g^2) = \frac{E^2 r^4}{(r + 3R)^4} \cdot \frac{(r + 3R)^2}{r^2} = \frac{E^2 r^2}{(r + 3R)^2}$$

Les valeurs efficaces des tensions aux bornes sont toutes égales, et les décalages sont de $\frac{2\pi}{3}$.

Cherchons les décalages dans le cas général; c'est-à-dire, $\varphi_2 - \varphi_1$, et $\varphi_3 - \varphi_2$, nous aurons :

$$\operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{\frac{0{,}866\ a}{d - 0{,}500\ a} - \frac{0{,}866\ c}{b - 0.500\ c}}{1 + \frac{0{,}75\ a\ c}{(d - 0{,}500a)(b - 0{,}500c)}}$$

$$\operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{0{,}866\,(ab - cd)}{bd - 0{,}500\,ab - 0{,}500\ cd + ac}$$

Nous avons également comme $\operatorname{tg}(\pi + \varphi_2) = \operatorname{tg}\varphi_2$:

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{\dfrac{0{,}866\,g}{g - 0{,}500\,h} - \dfrac{0{,}866\,a}{d - 0{,}500\,a}}{1 + \dfrac{0{,}75\,ag}{(g - 0{,}500\,h)(d - 0{,}500a)}}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{0{,}866\,gd - 1{,}30\,ag + 0{,}433\,ah}{gd - 0.500\,hd + 0{,}25\,ag + 0{,}25\,ah}$$

Si, comme il arrive toujours dans la pratique, R est très petit par rappport à r_1, r_2 et r_3, on a à peu près $a = b = g = h = 1$ et $c = d = o$, d'où :

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{0{,}866}{0{,}500} = -1{,}732$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{-1{,}30 + 0{,}433}{1 - 0{,}500} = -\frac{0{,}866}{0{,}500} = -1{,}732$$

$$(\varphi_3 - \varphi)_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Il est facile de voir également, que les tensions efficaces aux bornes varient très peu, dans ces conditions :

Exemple. — Soit R = 10 ohms, et le minimum de r_1, r_2 ou r_3, 250 ohms ; nous aurons, si nous coupons un des circuits, les charges des deux autres étant maxima, en faisant par exemple $r_3 = \infty$ et $r_1 = r_2 = 250$ ohms.

$$a = 1 + \frac{2\,R}{r_1} + \frac{R}{r_2} \qquad a = 1 + \frac{20}{250} = 1{,}08$$

$$b = 1 + \frac{2\,R}{r_2} + \frac{R}{r_3} = 1{,}08$$

$$c = d = \frac{10}{250} = 0{,}04$$

$$g = h = 1 + \frac{20}{250} + \frac{10}{250} = 1{,}12$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{0{,}866\,(\overline{1{,}08}^2-\overline{0{,}04}^2)}{1{,}08\times0{,}04-0{,}500\times\overline{1{,}08}^2-0{,}500\times\overline{0{,}04}^2+1{,}08\times0{,}04}=\frac{1{,}0087168}{0{,}4976}$$

$$\varphi_2-\varphi_1=116°\ 15'\ 30''$$

au lieu de 120°, soit une différence de 3° 44' 30".

$$\operatorname{tg}(\varphi_3-\varphi_2)=\frac{0.866\times1{,}12\times0{,}04-1{,}30\times1{,}08\times1{,}12+0{,}433\times1{,}08\times1{,}12}{1{,}12\times0{,}04-0{,}500\times1{,}12\times0{,}04+0{,}25\times1{,}08\times1{,}12+0{,}25\times1{,}08\times1{,}12}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_3-\varphi_2)=-\frac{1{,}0087168}{0{,}6272}$$

$$\varphi_3-\varphi_2=121°\ 52'\ 20''$$

au lieu de 120°, soit une différence de 1° 52' 20"

Le décalage entre le premier et le troisième courant est de 121° 52' 10", présentant une différence de 1° 52' 10" avec le décalage théorique.

Nous aurons en outre :

$$A=\frac{E}{ab-cd}=\frac{E}{1{,}1648}$$

$$X_1^2=\frac{E^2}{(1{,}1648)^2}\left\{\overline{1{,}08}^2+\overline{0{,}04}^2-1{,}08\times0{,}04\right\}=\frac{1{,}1248}{(1{,}1648)^2}E^2$$

$$X_3^2=\frac{E^2}{(1{,}1648)^2}\left\{\overline{1{,}08}^2+\overline{0{,}04}^2-1{,}08+0{,}04\right\}=X_1^2$$

$$X_2^2=\frac{E^2}{(1{,}1648)^2}\left\{\overline{1{,}12}^2+\overline{1{,}12}^2-\overline{1{,}12}^2\right\}=\frac{(1{,}12)^2}{(1{,}1648)^2}E^2$$

Les carrés des tensions efficaces aux bornes des circuits seront :

$$\frac{X_1^2}{2}=\frac{X_3^2}{2}=\frac{0{,}5624}{(1{,}1648)^2}E^2$$

$$\frac{X_2^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{(1{,}12)^2}{(1{,}1648)^2}E^2$$

Les tensions efficaces seront :

$$\frac{X_1}{\sqrt{2}} = \frac{X_2}{\sqrt{2}} = 0{,}64\ E$$

$$\frac{X_3}{\sqrt{2}} = 0{,}68\ E$$

On voit donc que le système de montage des récepteurs en triangle, se prête beaucoup mieux au cas des charges différentes, que le système de montage en étoile, sans fil de retour.

§ 3. — DES TRANSFORMATEURS POUR COURANTS POLYPHASÉS.

La théorie des transformateurs pour courants polyphasés est la même que celle des transformateurs ordinaires, que nous avons étudiés dans le chapitre relatif à l'induction mutuelle.

Les flux magnétiques (en admettant une perméabilité magnétique constante) sont représentés par des fonctions sinusoïdales décalées comme les courants. Si l'on veut, pour un transformateur de n courants de la première catégorie (décalés de $\frac{\pi}{n}$ d'un courant à l'autre) constituer des circuits fermes, on pourra par exemple employer $n+1$ noyaux reliés magnétiquement haut et bas; les n circuits primaires seront enroulés, ainsi que les secondaires, sur n de ces noyaux, et le $n+1$ servira simplement de retour au flux sans porter d'enroulement.

Pour les courants de la deuxième catégorie, il suffira dans le cas de charges égales, d'avoir n noyaux, car la somme des flux sera à chaque instant nulle, et on pourra, soit relier magnétiquement haut et bas tous ces noyaux, à un point central et avoir ainsi un montage analogue au montage des lignes, en étoile soit les réunir magnétiquement deux à deux, de manière à former, haut et bas, une couronne continue ; ce dernier montage sera analogue au montage des lignes en polygone, et, pour les mêmes raisons que dans le cas des lignes, il sera plus avantageux dans le cas où les charges seraient variables dans les divers circuits. Ce dernier montage pourra être effectué d'une manière simple en plaçant en haut et en bas deux culasses, reliant tous les noyaux.

Il sera cependant plus avantageux, dans le cas de charges inégales, de relier les deux culasses par un noyau central, ne portant aucun enroulement.

§ 4. — TRANSFORMATION DES COURANTS ALTERNATIFS EN COURANTS CONTINUS ET DES COURANTS CONTINUS EN COURANTS ALTERNATIFS.

En plaçant sur un même arbre l'induit d'un moteur à courant alternatif et celui d'une dynamo à courant continu, on obtiendra évidemment le transformateur demandé, mais l'appareil est compliqué, et le rendement peu élevé (1).

La transformation, en employant des courants polyphasés, est plus simple; on peut par exemple envoyer des courants alternatifs polyphasés de la deuxième catégorie (décalage de $\frac{2\pi}{n}$) dans l'induit d'une dynamo à courant continu par des points situés à $\frac{2\pi}{n}$ les uns des autres et obtenir ainsi un champ magnétique tournant; en fixant, au moyen d'un champ constant, la direction du champ dans l'espace, l'induit se met à tourner à raison de un tour par période (ainsi que nous le verrons dans l'étude des moteurs). On pourra sur l'arbre de cet induit, et dans le même champ constant, fixer un induit de dynamo ordinaire, et obtenir un courant continu.

On peut fixer les deux enroulements sur le même induit, ou mieux, comme l'a fait M. von Dolivo Dobrowolski, n'employer qu'un seul enroulement, relié d'un côté aux bagues recevant les courants polyphasés, et de l'autre à un commutateur de dynamo ordinaire à courant continu.

Une machine de ce genre peut servir évidemment :

1° de transformateur de courants polyphasés en courant continu;

2° de transformateur de courant continu en courants polyphasés;

3° de générateur de courants polyphasés;

4° de générateur de courant continu;

5° de moteur à courants polyphasés;

6° de moteur à courant continu.

On peut aussi engendrer, dans un anneau fixe, par exemple, un

(1) Nous étudierons dans la partie pratique, un système de transformation des courants continus en courants alternatifs, simples ou polyphasés, dû à M. F. Lucas. Voir *L'Électricien* du 8 Juillet 1893.

champ magnétique tournant au moyen de courants polyphasés, et placer à l'intérieur, un induit de dynamo à courant continu, en faisant déplacer les balais de manière à ce qu'ils suivent le champ tournant (en les disposant sur un moteur synchrone à courants polyphasés); on obtiendra un courant continu; on sera évidemment dans le cas d'une dynamo à courant continu, dont l'induit serait fixe, et dont le champ et les balais tourneraient.

MM. Hutin et Leblanc, en se basant sur le principe suivant, ont imaginé divers dispositifs pour la transformation du courant alternatif en courant continu et vice versa.

Si, (comme le dit M. Guilbert, dans un très intéressant article(1) sur les procédés Hutin et Leblanc, pour la transformation des courants alternatifs en courants continus), l'on considère un transformateur ordinaire à courant alternatif, avec ses deux circuits enroulés sur un même noyau, on ne changera rien aux inductions mutuelles ni à la transformation d'énergie d'un circuit à l'autre, si, lançant dans le primaire un courant alternatif, on fait en sorte que l'intensité dans le secondaire reste constante en faisant varier le nombre de spires suivant la loi du sinus.

Le travail d'un courant continu est constant, tandis que celui d'un courant alternatif est variable, il faudra donc, si l'on emploie un courant monophasé, pour obtenir un courant continu, emmagasiner du travail à un moment donné, et le restituer ensuite, soit en employant un condensateur ou une bobine d'induction. En employant des courants polyphasés, on n'a pas le même inconvénient, car le travail instantané a une valeur constante (page 137).

C'est ce qui a amené MM. Hutin et Leblanc à employer dans leur dernière méthode de transformation, des courants polyphasés, l'appareil actuellement en expériences dans l'usine de la Société pour la transmission de la force par l'électricité à Saint-Ouen, que l'on a nommé le *panchahuteur* et qui semble devoir entrer tout à fait dans la pratique. Il permet de transformer un courant continu en courants polyphasés et vice-versa, avec des rendements très élevés. Nous l'étudierons en détail dans la 2e partie de ces études.

L'appareil est constitué de la manière suivante :

(1) La *Lumière électrique*, Tome XLVII. — N° 2 du 14 Janvier 1893.

Sur les n circuits magnétiques d'un transformateur à courants polyphasés, on enroule un même nombre de spires, des n circuits parcourus par les courants polyphasés. On constitue p circuits secondaires, au moyen de bobines enroulées sur chacun des circuits magnétiques du transformateur, chacune de ces bobines ayant un nombre de spires déterminé, ainsi que nous le verrons plus loin. Un commutateur se déplace avec une vitesse uniforme et relie successivement chacun des p circuits au circuit dans lequel on veut recueillir le courant continu ; de sorte que si T est la durée d'une phase complète des courants, chacun des p circuits sont mis en relation pendant le temps $\frac{T}{p}$, avec le circuit d'utilisation.

On obtient ce résultat au moyen d'un moteur à courants polyphasés synchrone, portant des balais qui viennent relier successivement des touches placées aux extrémités des p circuits au circuit dans lequel on veut recueillir le courant continu.

Courants polyphasés de la 1re catégorie.

Le nombre de spires de chacun des p circuits, enroulées sur chacune des n bobines, est donné dans le tableau A (page 216).

Au moment où le premier des p circuits est mis en communication avec le circuit dans lequel on veut recueillir le courant continu, les intensités des courants circulant dans les bobines primaires des circuits magnétiques, seront, en supposant qu'alors $t = o$:

$$i_1 = I \sin(kt+\beta) = I \sin\beta \qquad i_l = I \sin\left(kt+\beta+\frac{l-1}{n}\pi\right) = I \sin\left(\beta+\frac{l-1}{n}\pi\right)$$

$$i_n = I \sin\left(kt+\beta+\frac{n-1}{n}\pi\right) = \sin\left(\beta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

Quand le $m^{ième}$ circuit sera relié au circuit dans lequel on recueille le courant continu, on aura :

$$t_m = \frac{(m-1)\,T}{p}$$

$$kt_m = \frac{2\pi}{T}\,\frac{(m-1)\,T}{p} = \frac{2(m-1)\pi}{p}$$

et les intensités des courants seront :

Tableau A.

NUMÉRO du circuit	NOMBRE DE SPIRES ENROULÉES SUR LE CIRCUIT MAGNÉTIQUE				
	1	..	l	..	n
1	$A \sin \alpha$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{l-1}{n}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{n-1}{n}\pi\right)$
..	..	..	..	..	..
m	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{l-1}{n}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)$
..	..	..	..	..	..
p	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(p-1)}{p}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(p-1)}{p} + \frac{l-1}{n}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(p-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)$

Tableau B.

NUMÉRO du circuit	NOMBRE DE SPIRES ENROULÉES SUR LE CIRCUIT MAGNÉTIQUE				
	1	.	l	.	n
1	$A \sin \alpha$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(l-1)}{n}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$
..	..	..	..	..	..
m	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{2(l-1)}{n}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$
..	..	..	..	..	..
p	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(p-1)}{p}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(p-1)}{p}\pi + \frac{2l-1)}{n}\pi\right)$	..	$A \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{n}\pi + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$

$$i_{m_1} = \mathrm{I} \sin\left(\beta + \frac{2(m-1)\pi}{p}\right)\ldots \quad i_{m_l} = \mathrm{I}\sin\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{l-1}{n}\pi\right)\ldots$$

$$i_{m_n} = \mathrm{I} \sin\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

Quand le $p^{ième}$ circuit sera relié on aura :

$$t_p = \frac{p-1}{p}\,\mathrm{T}$$

$$kt_p = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}\,\frac{p-1}{p}\,\mathrm{T} = \frac{2(p-1)}{p}\pi$$

et les intensités des courants seront :

$$i_{p_1} = \mathrm{I} \sin\left(\beta + \frac{2(p-1)}{p}\pi\right).. \quad i_{p_l} = \mathrm{I} \sin\left(\beta + \frac{2(p-1)}{p}\pi + \frac{l-1}{n}\pi\right)\ldots$$

$$i_{p_n} = \mathrm{I} \sin\left(\beta + \frac{2(p-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

Puisque le nombre de spires parcourues par les courants polyphasés, placées sur chaque circuit est constant, les flux magnétiques seront à chaque instant, proportionnels aux intensités des courants et on aura dans les circuits magnétiques au moment où le $m^{ième}$ des p circuits sera relié au circuit d'utilisation.

$$\Phi_{m_1} = \mathrm{B\,I} \sin\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right) \qquad \Phi_{m_l} = \mathrm{BI} \sin\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{l-1}{n}\pi\right)$$

$$\Phi_{m_n} = \mathrm{B\,I} \sin\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

La dérivée du flux, par rapport au temps, prise en signe contraire, sera pour chaque circuit magnétique :

$$-\frac{d\Phi_{m_1}}{dt} = -k\mathrm{BI}\cos\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right)$$

$$-\frac{d\Phi_{m_l}}{dt} = -k\mathrm{BI}\cos\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{l-1}{n}\pi\right)$$

$$-\frac{d\Phi m_n}{dt} = -kBI\cos\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

Le coefficient d'induction mutuelle étant proportionnel au nombre de spires enroulées sur chaque circuit magnétique, les f. e. m. développées dans les divers enroulements du *mième* des p circuits, seront :

$$e_{m_1} = -k\,ABC\,I\sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right)\cos\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right)$$

. . . . . .

$$e_{m_l} = -kABCI\sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{l-1}{n}\pi\right)\cos\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{l-1}{n}\pi\right)$$

. . . . . .

$$e_{m_n} = -kABCI\sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)\cos\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

Le produit k A B C I, est constant, nous pouvons le désigner par D.

Comme :

$$-\sin a\cos b = \frac{1}{2}\sin(b-a) - \frac{1}{2}\sin(a+b)$$

nous aurons

$$e_m = e_{m_1} + \ldots + e_{m_l} + \ldots + e_{m_n} = \frac{D}{2}\left\{\sin(\beta-\alpha) - \sin\left(\alpha+\beta+\frac{4(m-1)}{p}\pi\right) + \ldots\right.$$

$$\ldots + \sin(\beta-\alpha) - \sin\left(\alpha+\beta+\frac{4(m-1)}{p}\pi + \frac{2(l-1)}{n}\pi\right) + \ldots$$

$$\left. + \sin(\beta-\alpha) - \sin\left(\alpha+\beta+\frac{4(m-1)}{p}\pi + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right\}$$

Comme la somme des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{p}$ est nulle (page 21), on aura finalement:

$$e_m = \frac{n\,D}{2} \sin(\beta - \alpha)$$

On aura évidemment le même résultat à chaque instant, et la f. e. m. agissant dans le circuit extérieur, sera à très peu de chose près constante, donc on recueillera un courant continu.

Comme on est maître de relier le circuit extérieur, à un moment donné à n'importe lequel des p circuits, on est maître de la valeur de β, en faisant $\beta = \alpha$, on ne recueillera aucun courant.

Le maximum en valeur absolue, aura lieu pour $\beta = o$, c'est-à-dire quand le commutateur est disposé de telle sorte, que quand il relie le premier des p circuits, au circuit extérieur, l'intensité dans le primaire de la première bobine est nulle.

Courants polyphasés de la 2e catégorie.

Le nombre de spires de chacun des p circuits, enroulés sur chacune des n bobines est donné dans le tableau B (page 216).

La démonstration pourra se faire, exactement comme dans le cas précédent on aura :

$$e_{m_1} = -\,k\,\mathrm{ABCI}\sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right)\cos\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right)$$

. . . . . .

$$e_{m_l} = -k\,\mathrm{ABCI}\sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{2(l-1)}{n}\pi\right)\cos\left(\beta + \frac{p}{2(m-1)}\pi + \frac{2(l-1)}{n}\pi\right)$$

$$e_{m_n} = -k\,\mathrm{ABCI}\sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\cos\left(\beta + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{2(n-1)}{n}\pi\right)$$

Et comme la somme des cosinus de n angles, formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{4\pi}{n}$, est nulle (page 22), on aura encore :

$$e_m = e_{m_1} + \ldots + e_{m_l} \ldots + e_{m_n} = \frac{n\,D}{2} \sin(\beta - \alpha)$$

Les appareils des deux catégories sont *réversibles*, c'est-à-dire que si l'on dispose d'un courant continu, et qu'on le mette successivement en relation pendant un espace de temps $\frac{T}{p}$, avec chacun des p circuits, on obtiendra n courants décalés, soit de $\frac{\pi}{n}$ soit de $\frac{2\pi}{n}$, suivant que l'appareil sera disposé pour la première catégorie ou la deuxième des courants polyphasés, en effet :

Supposons que le m ième circuit de l'appareil de la première catégorie soit parcouru par le courant continu d'intensité I, à l'instant $\frac{mT}{p}$ le flux de force dans chaque circuit magnétique sera :

$$\Phi_{m_1} = \text{BAI} \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi\right)$$

. . . . . .

$$\Phi_{m_l} = \text{BAI} \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{l-1}{n}\pi\right)$$

. . . . . .

$$\Phi_{m_n} = \text{BA1} \sin\left(\alpha + \frac{2(m-1)}{p}\pi + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

Quand le commutateur reliera le circuit suivant et qu'il cessera brusquement de relier le circuit m, le flux de force cessera brusquement et la f. e. m. engendrée dans chacun des circuits sera proportionnelle aux valeurs de Φ.

On obtiendra donc des courants décalés de $\frac{\pi}{n}$, d'un circuit à l'autre. Comme les spires actives dans un même circuit magnétique varient sensiblement suivant la loi sinusoïdale (car on passe d'un circuit à l'autre en ajoutant à l'angle correspondant $\frac{2\pi}{p}$) on obtiendra dans chacun des circuits extérieurs un courant sensiblement sinusoïdal, et ces courants seront décalés à chaque instant de $\frac{\pi}{n}$ d'un de ces circuits à l'autre.

On obtiendra le même résultat avec un appareil de la deuxième catégorie, mais les courants seront décalés de $\frac{2\pi}{n}$ d'un circuit extérieur à l'autre.

La durée de la période des courants alternatifs sera égale au temps que met le commutateur à relier tous les circuits, c'est-à-dire à la durée d'un tour si le commutateur est circulaire, ainsi qu'il est constitué dans la pratique.

Pratiquement, on peut donner à p des valeurs assez petites, sans avoir à craindre que le courant continu obtenu ait des variations trop fortes ou que les courants polyphasés obtenus diffèrent trop sensiblement, de courants sinusoïdaux, car la s. i. des circuits atténue considérablement les variations brusques.

CHAPITRE V

Théorie des moteurs à courant alternatif

§ 1er — CLASSEMENT DES MOTEURS

Dans une conférence qu'il a faite à la Société française de physique le 17 juillet 1891, M. Hospitalier a classé les moteurs à courant alternatif de la manière suivante :

1° Moteurs à champ constant ou à champ de direction constante ;

2° Moteurs à champ alternatif ;

3° Moteurs à champ tournant.

C'est le mode de classement que nous adopterons.

Les moteurs de la première catégorie peuvent se subdiviser en :

a) moteurs à champ constant dû à des aimants permanents ;

b) moteurs à champ constant dû à des électro-aimants ;

c) moteurs à champ de direction constante, obtenu en redressant un courant alternatif ;

Le courant parcourant l'induit étant alternatif.

Ceux de la deuxième catégorie, dans lesquels les inducteurs sont parcourus par un courant alternatif, peuvent se classer, suivant le courant circulant dans l'induit, en :

a) moteurs en série. Les inducteurs et l'induit étant en série sur un même circuit parcouru par un courant alternatif ;

b) moteurs shunt. Les inducteurs et l'induit étant en dérivation sur un même circuit ;

c) moteurs à courant redressé. L'induit étant parcouru par un courant redressé ;

d) moteurs à courant continu. L'induit étant parcouru par un courant continu.

e) moteurs à induit constitué par des circuits fermés.

Les moteurs à champ tournant, peuvent se classer suivant le genre de courants donnant naissance au champ tournant. Comme

nous avons déjà étudié la génération des champs tournants, nous classerons ces moteurs en :

a) moteurs synchrones ;

b) moteurs asynchrones ou à induit constitué par des circuits fermés.

Nous supposerons que les inducteurs sont fixes et que l'induit peut tourner, il sera facile d'en déduire les formules à appliquer pour le cas où l'inducteur est mobile et l'induit fixe.

§ 2. — MOTEURS A CHAMP DE DIRECTION CONSTANTE.

Que le champ soit dû à des aimants permanents ou à des électro-aimants, la théorie est la même.

Soit Φ_0 l'intensité constante du champ magnétique, et :

$$i = I \sin kt$$

l'intensité du courant parcourant l'induit supposé formé d'une spire pouvant tourner autour d'un axe perpendiculaire à la direction du champ.

Dans l'étude des moteurs, nous admettrons que quelque soit le couple moteur qui agit, même quand la valeur de celui-ci n'est pas constante, une fois le régime permanent établi, la vitesse angulaire de l'induit est uniforme et nous représenterons cette vitesse par k'. Une spire de l'induit fait donc avec la direction du champ, à l'instant t, l'angle $k't + \alpha$, α étant une constante qui est l'angle que fait la spire avec la direction du champ à l'origine du temps.

Si S est la surface de la spire, le flux qui la traversera à l'instant t sera :

$$\Phi_1 = \Phi_0 \, S \sin (k't + \alpha)$$

Le couple étant égal au produit de l'intensité du courant par le flux extérieur traversant la spire, sera :

$$C = \Phi_1 \, i = \Phi_0 \, S \, I \sin kt \sin (k't + \alpha)$$

Comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left\{\cos(a-b) - \cos(a+b)\right\}$$

$$C = \Phi_o \frac{S\,I}{2}\left\{\cos[(k-k')t - \alpha] - \cos[(k+k')t + \alpha]\right\}$$

La valeur moyenne du couple pour un cycle complet, sera toujours nulle, car :

$$\int_o^{2\pi} \cos kt = o,$$

à moins que $k = k'$; dans ce cas, on aura :

$$C_{moy} = \frac{1}{2}\Phi_o\, S\, I \cos\alpha$$

On a donc affaire à un moteur synchrone, dont la vitesse angulaire est la même que celle du courant alternatif.

Comme le couple est nul tant que k' est différent de k, le moteur ne peut démarrer seul, c'est-à-dire qu'il faut le lancer. Pour $\alpha = o$ le couple est maximum et sa valeur est :

$$C_{max} = \frac{\Phi_o\, S\, I}{2}$$

La force contre-électromotrice dans l'induit est à chaque instant :

$$-\frac{d\Phi_1}{dt} = -k'\,\Phi_o\, S\cos(k't + \alpha) = -k\,\Phi_o\, S\cos(kt + \alpha)$$

c'est-à-dire de même période que le courant, il suffira donc de développer aux extrémités de l'induit une f. e. m. $e_a = E_a \sin(kt + \theta)$.

Dans le cas où *l'inducteur est parcouru par un courant redressé* si l'on ne tient pas compte de la s. i., qui a pour effet de diminuer les ondulations du courant redressé, l'intensité du champ magnétique, pourra être représentée à chaque instant par la relation :

$$\Phi = \Phi_o \sqrt{\sin^2 kt}$$

Le flux de force traversant la spire sera à l'instant t :

$$\Phi_1 = \Phi\, S \sin(k't + \theta) = \Phi_o\, S \sqrt{\sin^2 kt}\, \sin(k't + \alpha)$$

L'intensité du courant circulant dans la spire pouvant être représentée par :

$$i = \mathrm{I} \sin (kt - \varphi)$$

La valeur instantanée du couple moteur sera :

$$\mathrm{C} = \Phi_1 i = \Phi_o \mathrm{I\,S} \sqrt{\sin^2 kt} \sin (k't + \alpha) \sin (kt - \varphi)$$

$$\mathrm{C} = \frac{\Phi_o \mathrm{I\,S}}{2} \sqrt{\sin^2 kt} \left\{ \cos [(k - k')\, t - \varphi - \alpha] - \cos [(k + k')\, t - \varphi + \alpha] \right\}$$

Pour trouver la valeur moyenne du couple, il faut intégrer entre deux valeurs de t, l'une $t = o$, et l'autre t_1 rendant kt_1, $(k - k')\, t_1$ et $(k + k')\, t_1$, multiples de 2π.

Si l'on considère deux valeurs de t, l'une t_2 et l'autre $t_1 - t_2$, il est facile de voir que les deux valeurs de $\sqrt{\sin^2 kt}$ seront égales et de même signe, tandis que les valeurs des termes entre parenthèses seront égales en valeur absolue et de signes contraires, de sorte que la valeur moyenne du couple sera nulle, à moins d'avoir $k = k'$ et dans ce cas on aura :

$$\mathrm{C} = \frac{\Phi_o \mathrm{I\,S}}{2} \sqrt{\sin^2 kt} \cos (\varphi + \alpha)$$

La valeur moyenne de $\sqrt{\sin^2 kt}$ est égale à la valeur moyenne de sin kt prise entre o et π, c'est-à-dire $\frac{2}{\pi}$ (page 19).

On aura donc :

$$\mathrm{C}_{moy} = \frac{\Phi_o \mathrm{I\,S}}{\pi} \cos (\varphi + \alpha)$$

Le moteur sera donc, comme ceux examinés précédemment, un moteur synchrone dont la vitesse angulaire sera la même que celle du courant alternatif, et il ne pourra démarrer seul.

La valeur moyenne du couple sera maximum pour $\varphi + \alpha = o$ et on aura alors :

$$\mathrm{C}_{max} = \frac{\Phi_o \mathrm{I\,S}}{\pi}$$

§ 3. — MOTEURS DE LA DEUXIÈME CATÉGORIE OU MOTEURS A CHAMP ALTERNATIF.

a. *Moteur en série.* Le courant circulant dans les inducteurs et celui circulant dans l'induit ne sont pas décalés l'un par rapport à l'autre.

L'intensité du champ pourra être représentée par

$$\Phi = \Phi_o \sin kt$$

et l'intensité du courant dans la spire, par :

$$i = I \sin kt$$

Le flux embrassé par la spire à l'instant t sera :

$$\Phi_1 = \Phi \, S \sin (k't + \alpha) = \Phi_o \, S \sin kt \sin (k't + \alpha)$$

Comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \left\{ \cos (a - b) - \cos (a + b) \right\}$$

on aura :

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_o S}{2} \left\{ \cos [(k - k') t - \alpha] - \cos [(k + k') t + \alpha] \right\}$$

Le couple moteur sera :

$$C = \Phi_1 i = \frac{\Phi_o S I}{2} \sin kt \left\{ \cos [(k - k') t - \alpha] - \cos [(k + k') t + \alpha] \right\}$$

Comme :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \left\{ \sin (a - b) + \sin (a + b) \right\}$$

on aura :

$$C = \frac{\Phi_o S I}{4} \left\{ \sin (k't + \alpha) + \sin [(2k - k') t - \alpha] - \sin (-k't - \alpha) \right.$$

$$\left. \sin [(2k + k') t + \alpha] \right\}$$

Pour avoir la valeur moyenne du couple, il faut intégrer de $t = o$ à une valeur t_1 de t rendant $k't_1$, $(2k - k')\ t_1$ et $(2k + k')\ t_1$ multiples de 2π.

Comme la valeur moyenne d'un sinus prise entre o et 2π est nulle, la valeur moyenne du couple est toujours nulle, à moins que l'on ait $k' = 2k$, dans ce cas la valeur moyenne du couple est en valeur absolue :

$$C_{moy} = \frac{\Phi_o\ S\ I}{4} \sin \alpha$$

Le moteur est donc synchrone, sa vitesse angulaire est double de celle du courant alternatif et il ne peut démarrer seul.

La valeur moyenne du couple est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et on a :

$$C_{max} = \frac{\Phi_o S\ I}{4}$$

b. ***Moteur shunt.***

Les courants circulant dans les inducteurs et dans les spires de l'induit sont décalés l'un par rapport à l'autre, si :

$$\Phi = \Phi_o \sin (kt - \varphi)$$

représente l'intensité du champ magnétique et :

$$i = I \sin kt$$

l'intensité du courant circulant dans la spire de l'induit ; le flux de force traversant la spire sera :

$$\Phi_1 = \Phi_o\ S \sin (kt - \varphi) \sin (k't + \alpha)$$

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_o\ S}{2} \left\{ \cos [(k - k')\ t - \varphi - \alpha] - \cos [(k + k')\ t - \varphi + \alpha] \right\}$$

La valeur instantanée du couple sera :

$$C = \Phi_1 i = \frac{\Phi_o\ I\ S}{2} \left\{ \sin kt \cos [(k - k')\ t - \varphi - \alpha] - \sin kt \right.$$

$$\left. \cos [(k + k')\ t - \varphi + \alpha] \right\}$$

$$C = \frac{\Phi_o \, IS}{4} \left\{ \sin (k't + \varphi + \alpha) + \sin [(2k - k')t - \varphi - \alpha] - \sin (-k't + \varphi - \alpha) \right.$$

$$\left. - \sin [(2k + k')t - \varphi - \alpha] \right\}$$

Comme pour le moteur en série, la valeur moyenne du couple sera constamment nulle, tant que l'on n'aura pas :

$$k' = 2k$$

Dans ce cas. on aura :

$$C_{moy} = \frac{\Phi_o \, I \, S}{4} \sin (\varphi + \alpha)$$

La valeur moyenne du couple sera maximum pour $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$.

On aura donc un moteur synchrone ne pouvant démarrer seul dont la vitesse angulaire est double de celle du courant alternatif.

c. Moteur à courant redressé.

La valeur instantanée du champ étant :

$$\Phi = \Phi_o \sin (kt - \varphi)$$

Celle de l'intensité du courant pourra être représentée par :

$$i = I \sqrt{\sin^2 kt}$$

Le flux instantané traversant la spire sera :

$$\Phi_t = \Phi \, S \sin (k't + \alpha) = \Phi_o \, S \sin (kt - \varphi) \sin (k't + \alpha)$$

La valeur instantanée du couple sera :

$$C_t = \Phi_o \, S \, I \sqrt{\sin^2 kt} \sin (kt - \varphi) \sin (k't + \alpha)$$

On trouve exactement la même valeur que dans le cas du moteur à champ de direction constante (page 225).

La valeur moyenne du couple sera :

$$C_{moy} = \frac{\Phi_o \, I \, S}{\pi} \cos (\varphi + \alpha)$$

Le moteur sera synchrone et sa vitesse angulaire sera la même que celle du courant alternatif, il ne pourra démarrer seul.

d. ***Moteur à courant continu.***

L'intensité du champ magnétique étant :

$$\Phi = \Phi_o \sin kt$$

Le flux de force traversant la spire sera :

$$\Phi_1 = \Phi\ S \sin (k't + \alpha) = \Phi_o\ S \sin kt \sin (k't + \alpha)$$

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_o S}{2} \left\{ \cos [(k - k') t - \alpha] - \cos [(k + k') t + \alpha] \right\}$$

L'intensité du courant qui circule dans la spire, étant I, la valeur instantanée du couple sera :

$$C = \frac{\Phi_o I S}{2} \left\{ \cos [(k - k') t - \alpha)] - \cos [(k + k') t + \alpha] \right\}$$

La valeur moyenne du couple sera nulle tant que k' sera différent de k.

Le moteur est donc synchrone et sa vitesse angulaire est la même que celle du courant alternatif, il ne peut démarrer seul.

Quand le régime permanent est établi la valeur moyenne du couple est :

$$C_{moy} = \frac{\Phi_o I S}{2} \cos \alpha$$

La valeur moyenne maximum est :

$$C_{max} = \frac{\Phi I S}{2}$$

Nota : Dans tous les moteurs dont nous venons d'étudier sommairement le fonctionnement, car nous n'avons pas tenu compte de la réaction d'armature etc., l'induit, au lieu d'être formé d'une seule spire, pourrait être formé de m spires faisant entre elles des angles égaux à $\frac{\pi}{m}$.

Les moteurs auraient encore les mêmes propriétés, il suffirait de remplacer dans les relations donnant la valeur moyenne du couple,

$$\cos\alpha, \text{ par } \cos\alpha + \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{m}\right)+\ldots\ldots+\cos\left(\alpha+\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

$$\cos(\varphi+\alpha), \text{ par } \cos(\varphi+\alpha)+\cos\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{m}\right)+\ldots\ldots+\cos\left(\varphi+\alpha+\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

$$\sin\alpha, \text{ par } \sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{m}\right)+\ldots\ldots+\sin\left(\alpha+\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

$$\sin(\varphi+\alpha), \text{ par } \sin(\varphi+\alpha)+\sin\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{m}\right)+\ldots\ldots+\sin\left(\varphi+\alpha+\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

e. ***Moteur à induit constitué par des circuits fermés.***

L'intensité du champ pourra être représentée à chaque instant par :

$$\Phi = \Phi_o \sin kt$$

Supposons l'induit formé de m cadres disposés symétriquement autour d'un axe commun, perpendiculaire à la direction du champ et faisant par conséquent entre eux des angles $\frac{\pi}{m}$.

Si le premier cadre fait à l'instant donné l'angle $k't+\alpha$, avec la direction du champ, le deuxième fera l'angle $k't+\alpha+\frac{\pi}{m}$, le $n^{ième}$ l'angle $k't+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi$ etc...

Le flux de force traversant le $n^{ième}$ cadre à l'instant t sera, si S est sa surface totale :

$$\Phi_n = \Phi_o S \sin kt \sin\left(k't+\alpha+\frac{(n-1)\pi}{m}\right)$$

et comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left\{\cos(a-b)-\cos(a+b)\right\}$$

$$\Phi_n = \frac{\Phi_o S}{2}\left\{\cos\left\{(k-k')t-\alpha-\frac{n-1}{m}\pi\right\}-\cos\left\{(k+k')t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi\right\}\right\}$$

La f.e.m. développée dans le circuit sera :

$$=-\frac{d\Phi_n}{dt}=\frac{\Phi_o S}{2}\left[(k-k')\sin\left\{(k-k')t-\alpha-\frac{n-1}{m}\pi\right\}-(k+k')\right.$$

$$\left.\sin\left\{(k+k')t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi\right\}\right]$$

Dans chaque cadre, il circulera un courant, dont l'intensité sera à chaque instant égale à la différence des intensités de deux courants périodiques simples. Il est facile de voir que dans l'ensemble des cadres formant l'induit, il circulera deux systèmes de courants polyphasés de la 1re catégorie; d'après ce que nous avons vu, (page 153) pour avoir l'intensité de chacun de ces courants, il faudra admettre que le coefficient de s. i. de ce cadre l,est multiplié par $\frac{m}{2}$, on aura :

$$L = \frac{m\ l}{2}$$

Si r est la résistance du circuit, on aura, en posant:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(k-k')L}{r} = \frac{(k-k')\ m\ l}{2\ r} \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(k+k')\ L}{r} = \frac{(k+k')\ m\ l}{2\ r}$$

$$i_n = \frac{\Phi_o S}{2\ r}\left[(k-k')\cos\varphi_1 \sin\left\{(k-k')\ t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_1\right\} - (k+k')\right.$$

$$\left.\cos\varphi_2 \sin\left\{(k+k')\ t + \alpha + \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_2\right\}\right]$$

Le couple auquel est soumis le *nième* cadre est :

$$C_n = \Phi_n i_n = \frac{\Phi_o^2 S^2}{4\ r}\left\{(k-k')\cos\varphi_1\left[\sin\left\{(k-k')\ t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_1\right\}\right.\right.$$

$$\cos\left\{(k-k')\ t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi\right\} - \sin\left\{(k-k')\ t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_1\right\}$$

$$\left.\cos\left\{k+k')\ t + \alpha + \frac{n-1}{m}\pi\right\}\right] - (k+k')\cos\varphi_2\left[\sin\left\{(k+k', t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi - \varphi_2\right\}\right.$$

$$\cos\left\{(k-k')t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi\right\} - \sin\left\{(k+k')\ t + \alpha + \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_2\right\}$$

$$\left.\left.\cos\left\{(k+k')\ t + \alpha + \frac{n-1}{m}\pi\right\}\right]\right\}$$

comme :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\right\}$$

$$C_n = \frac{\Phi_o^2 S^2}{8r}\Big\{(k-k')\cos\varphi_1\Big[\sin\Big\{2(k-k')t - 2\alpha - \frac{2(n-1)}{m}\pi - \varphi_1\Big\}$$

$$+\sin(-\varphi_1) - \sin(2kt-\varphi_1) - \sin\Big\{-2k't - 2\alpha - \frac{2(n-1)}{m}\pi - \varphi_1\Big\}\Big]$$

$$-(k+k')\cos\varphi_2\Big[\sin(2kt-\varphi_2) + \sin\Big\{2k't + 2\alpha + \frac{2(n-1)}{m}\pi - \varphi_2\Big\}$$

$$-\sin\Big\{2(k+k')t + 2\alpha + \frac{2(n-1)}{m}\pi - \varphi_2\Big\} - \sin(-\varphi_2)\Big]\Big\}$$

Le couple total sera égal à la somme des couples partiels ; en remarquant que la somme des sinus de m angles qui forment une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{m}$ est égale à zéro, on aura :

$$C = \frac{m\Phi_o^2 S^2}{8r}\Big[(k-k')\cos\varphi_1\ [-\sin\varphi_1 - \sin(2kt-\varphi_1)] - (k+k')\cos\varphi_2$$

$$[\sin(2kt-\varphi_2) - \sin(-\varphi_2)]\Big]$$

La valeur instantanée absolue du couple total est donc :

$$C = \frac{m\Phi_o^2 S^2}{8r}\Big[(k-k')\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + (k+k')\sin\varphi_2\cos\varphi_2 + (k-k')\cos\varphi_1$$

$$\sin(2kt-\varphi_1) + (k+k')\cos\varphi_2\sin(2kt-\varphi_2)\Big]$$

Le couple moteur varie donc périodiquement et la durée de sa période $T = \frac{\pi}{k}$, est moitié de celle du courant circulant dans l'inducteur.

Sa valeur moyenne est :

$$C_{moy} = \frac{m\Phi_o^2 S^2}{8r}\Big\{(k-k')\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + (k+k')\sin\varphi_2\cos\varphi_2\Big\}$$

Car la valeur moyenne sin $(x-a)$ prise entre o et 2π est nulle.

Nous avons en posant :

$$c = \frac{L}{r} = \frac{ml}{2r}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(k - k')\, m\, l}{2\, r} = c\,(k - k') \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(k + k')\, m\, l}{2\, r} = c\,(k + k')$$

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \frac{c\,(k - k')}{1 + c^2\,(k - k')^2}$$

$$\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = \frac{c\,(k + k')}{1 + c^2\,(k + k')^2}$$

$$(k - k') \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + (k + k') \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = \frac{c\,(k - k')^2}{1 + c^2\,(k - k')^2} + \frac{c\,(k + k')^2}{1 + c^2\,(k + k')^2}$$

$$C_m = \frac{m\, \Phi_o^2\, S^2}{8\, r}\, c \left\{ \frac{(k - k')^2}{1 + c^2\,(k - k')^2} + \frac{(k + k')^2}{1 + c^2\,(k + k')^2} \right\}$$

$$C_m = \frac{m \Phi_o^2\, S^2}{8}\, L \left\{ \frac{(k + k')^2}{r^2 + L^2\,(k + k')^2} + \frac{(k - k')^2}{r^2 + L^2\,(k - k')^2} \right\}$$

$$C_m = \frac{1}{2}\, m^2\, \Phi_o^2\, S^2\, l \left\{ \frac{(k + k')^2}{4\, r^2 + m^2\, l^2\,(k + k')^2} + \frac{(k - k')^2}{4\, r^2 + m^2\, l^2\,(k - k')^2} \right\}$$

Pour $k' = o$, c'est-à-dire au démarrage, la valeur moyenne du couple moteur sera :

$$C_d = \frac{m\, \Phi_o^2\, S^2}{8\, r}\, c\, \frac{2\, k^2}{1 + k^2\, c^2}$$

On a donc affaire à un moteur asynchrone pouvant démarrer seul quand le couple résistant ne dépasse pas une certaine valeur C_d.

Rendement.

Le produit du carré de l'intensité du courant par la résistance, pour le *nième* circuit sera :

$$r\, i_n^2 = \frac{\Phi_o^2 S^2}{4\, r} \left[(k - k')^2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \left\{ (k - k')\, t + \alpha - \frac{n - 1}{m}\, \pi - \varphi_1 \right\} \right.$$

$$\left. + (k + k')^2 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \left\{ (k + k')\, t + \alpha + \frac{n - 1}{m}\, \pi - \varphi_2 \right\} \right.$$

$$\left. - 2\,(k - k')\,(k + k') \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \left\{ (k - k')\, t - \alpha - \frac{n - 1}{m}\, \pi - \varphi_1 \right\} \right.$$

$$\sin\left\{(k+k')\,t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi-\varphi_2\right\}\Big]$$

Comme :

$$\sin^2 a=\frac{1}{2}(1-\cos 2a)$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\Big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big]$$

$$r\,i_n^2=\frac{\Phi_o^2S^2}{8r}\Big[(k-k')^2\cos^2\varphi_1-(k-k')^2\cos^2\varphi_1\cos\Big\{2(k-k')$$

$$-2\alpha-\frac{2(n-1)}{m}\pi-2\varphi_1\Big\}+(k+k')^2\cos^2\varphi_2-(k+k')^2\cos^2\varphi_2$$

$$\cos\Big\{2(k+k')\,t+2\alpha+\frac{2(n-1)}{m}\pi-2\varphi_2\Big\}-2(k-k')(k+k')\cos\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$\cos\Big\{-2k't-2\alpha-\frac{2(n-1)}{m}\pi-\varphi_1+\varphi_2\Big\}+2(k-k')(k+k')$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Big\{2\,kt-\varphi_1-\varphi_2\Big\}\Big]$$

La somme des quantités telles que ri_n^2 pour les m cadres, qui est le travail perdu dans les circuits, en remarquant que la somme des cosinus de m angles formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{m}$ est nulle (page 21), sera :

$$\Sigma\,ri^2=\frac{\Phi_o^2S^2}{8r}\Big[m(k-k')^2\cos^2\varphi_1+m(k+k')^2\cos^2\varphi_2+2m(k-k')(k+k')$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Big\{2\,kt-\varphi_1-\varphi_2\Big\}\Big]$$

Le travail moyen perdu dans les cadres par suite de leur résistance

$$=\frac{m\Phi_o^2S^2}{8r}\Big((k-k')^2\cos^2\varphi_1+(k+k')^2\cos^2\varphi_2\Big)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}$$

on aura :

$$T_p = \frac{m \Phi_o^2 S^2}{8 r} \left\{ \frac{(k-k')^2}{1+c^2(k-k')^2} + \frac{(k+k')^2}{1+c^2(k+k')^2} \right.$$

Le travail moyen du couple, puisque sa vitesse angulaire moyenne est k', sera :

$$k' C_m = \frac{m k' \Phi_o S^2 c}{8 r} \left\{ \frac{(k-k')^2}{1+c^2(k-k')^2} + \frac{(k+k')^2}{1+c^2(k+k')^2} \right\}$$

Le rendement en ne tenant compte que de la perte dans l'induit sera :

$$R' = \frac{k' C_m}{k' C_m + T_p} = \frac{m \frac{k' \Phi_o^2 S^2}{8 r} c}{m \frac{k' \Phi_o^2 S^2}{8 r} c + \frac{m \Phi_o^2 S^2}{8 r}} = \frac{k' c}{k' c + 1}$$

Comme $c = \frac{L}{r} = \frac{m l}{2r}$, on aura :

$$R' = \frac{k' \frac{m l}{2 r}}{1 + \frac{k' m l}{2 r}} = \frac{k' m l}{2r + k' m l} = \frac{k' L}{r + k' L}$$

Le rendement augmenté avec k', dont la valeur se déduit de celle du couple résistant, il est d'autant plus grand que l est plus grand et que r est plus petit.

§ 4. — MOTEURS A CHAMP TOURNANT.

Comme ce genre de moteurs tend de plus en plus à se répandre, nous étudierons plus en détail leur fonctionnement en tenant compte des réactions d'armature etc.

a) *Moteurs synchrones.*

Soit k la vitesse angulaire du champ tournant et Φ_0 son intensité.

Supposons qu'un cadre pouvant tourner autour d'un axe se confondant avec celui du champ, soit parcouru par un courant continu d'intensité I.

Ce cadre se mettra à tourner dans le champ avec une vitesse k' et

$$\sin\left\{(k+k')\,t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi-\varphi_2\right\}\Big]$$

Comme :

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha).$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\Big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big]$$

$$r\,i_n^2=\frac{\Phi_o^2S^2}{8r}\Big[(k-k')^2\cos^2\varphi_1-(k-k')^2\cos^2\varphi_1\cos\Big\{2(k-k')$$

$$-2\alpha-\frac{2(n-1)}{m}\pi-2\varphi_1\Big\}+(k+k')^2\cos^2\varphi_2-(k+k')^2\cos^2\varphi_2$$

$$\cos\Big\{2(k+k')\,t+2\alpha+\frac{2(n-1)}{m}\pi-2\varphi_2\Big\}-2(k-k')(k+k')\cos\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$\cos\Big\{-2k't-2\alpha-\frac{2(n-1)}{m}\pi-\varphi_1+\varphi_2\Big\}+2(k-k')(k+k')$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Big\{2kt-\varphi_1-\varphi_2\Big\}\Big]$$

La somme des quantités telles que ri_n^2 pour les m cadres, qui est le travail perdu dans les circuits, en remarquant que la somme des cosinus de m angles formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{m}$ est nulle (page 21), sera :

$$\Sigma\,ri^2=\frac{\Phi_o^2S^2}{8r}\Big[m(k-k')^2\cos^2\varphi_1+m(k+k')^2\cos^2\varphi_2+2m(k-k')(k+k')$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Big\{2kt-\varphi_1-\varphi_2\Big\}\Big]$$

Le travail moyen perdu dans les cadres par suite de leur résistance sera donc :

$$T_p=\frac{m\Phi_o^2S^2}{8r}\Big((k-k')^2\cos^2\varphi_1+(k+k')^2\cos^2\varphi_2\Big)$$

Comme,

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}$$

on aura :

$$T_p = \frac{m \Phi_o^2 S^2}{8 r} \left\{ \frac{(k - k')^2}{1 + c^2 (k - k')^2} + \frac{(k + k')^2}{1 + c^2 (k + k')^2} \right.$$

Le travail moyen du couple, puisque sa vitesse angulaire moyenne est k', sera :

$$k' C_m = \frac{m k' \Phi_o S^2 c}{8 r} \left\{ \frac{(k - k')^2}{1 + c^2 (k - k')^2} + \frac{(k + k')^2}{1 + c^2 (k + k')^2} \right\}$$

Le rendement en ne tenant compte que de la perte dans l'induit sera :

$$R' = \frac{k' C_m}{k' C_m + T_p} = \frac{m \frac{k' \Phi_o^2 S^2}{8 r} c}{m \frac{k' \Phi_o^2 S^2}{8 r} c + \frac{m \Phi_o^2 S^2}{8 r}} = \frac{k' c}{k' c + 1}$$

Comme $c = \frac{L}{r} = \frac{m l}{2 r}$, on aura :

$$R' = \frac{k' \frac{m l}{2 r}}{1 + \frac{k' m l}{2 r}} = \frac{k' m l}{2 r + k' m l} = \frac{k' L}{r + k' L}$$

Le rendement augmenté avec k', dont la valeur se déduit de celle du couple résistant, il est d'autant plus grand que l est plus grand et que r est plus petit.

§ 4. — MOTEURS A CHAMP TOURNANT.

Comme ce genre de moteurs tend de plus en plus à se répandre, nous étudierons plus en détail leur fonctionnement en tenant compte des réactions d'armature etc.

a) *Moteurs synchrones.*

Soit k la vitesse angulaire du champ tournant et Φ_0 son intensité.

Supposons qu'un cadre pouvant tourner autour d'un axe se confondant avec celui du champ, soit parcouru par un courant continu d'intensité I.

Ce cadre se mettra à tourner dans le champ avec une vitesse k' et

$$C = \frac{\Phi_o \, IS}{4} \Big\{ \sin(k't + \varphi + \alpha) + \sin[(2k - k')t - \varphi - \alpha] - \sin(-k't + \varphi - \alpha) - \sin[(2k + k')t - \varphi - \alpha] \Big\}$$

Comme pour le moteur en série, la valeur moyenne du couple sera constamment nulle, tant que l'on n'aura pas :

$$k' = 2k$$

Dans ce cas. on aura :

$$C_{moy} = \frac{\Phi_o \, I \, S}{4} \sin(\varphi + \alpha)$$

La valeur moyenne du couple sera maximum pour $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$.

On aura donc un moteur synchrone ne pouvant démarrer seul dont la vitesse angulaire est double de celle du courant alternatif.

c. Moteur à courant redressé.

La valeur instantanée du champ étant :

$$\Phi = \Phi_o \sin(kt - \varphi)$$

Celle de l'intensité du courant pourra être représentée par :

$$i = I \sqrt{\sin^2 kt}$$

Le flux instantané traversant la spire sera :

$$\Phi_t = \Phi \, S \sin(k't + \alpha) = \Phi_o \, S \sin(kt - \varphi) \sin(k't + \alpha)$$

La valeur instantanée du couple sera :

$$C_t = \Phi_o \, S \, I \sqrt{\sin^2 kt} \sin(kt - \varphi) \sin(k't + \alpha)$$

On trouve exactement la même valeur que dans le cas du moteur à champ de direction constante (page 225).

La valeur moyenne du couple sera :

$$C_{moy} = \frac{\Phi_o \, I \, S}{\pi} \cos(\varphi + \alpha)$$

Le moteur sera synchrone et sa vitesse angulaire sera la même que celle du courant alternatif, il ne pourra démarrer seul.

d. ***Moteur à courant continu.***

L'intensité du champ magnétique étant :

$$\Phi = \Phi_o \sin kt$$

Le flux de force traversant la spire sera :

$$\Phi_1 = \Phi\, S \sin (k't + \alpha) = \Phi_o\, S \sin kt \sin (k't + \alpha)$$

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_o\, S}{2} \left\{ \cos [(k - k')\, t - \alpha] - \cos [(k + k')\, t + \alpha] \right\}$$

L'intensité du courant qui circule dans la spire, étant I, la valeur instantanée du couple sera :

$$C = \frac{\Phi_o\, I\, S}{2} \left\{ \cos [(k - k')\, t - \alpha)] - \cos [(k + k')\, t + \alpha] \right\}$$

La valeur moyenne du couple sera nulle tant que k' sera différent de k.

Le moteur est donc synchrone et sa vitesse angulaire est la même que celle du courant alternatif, il ne peut démarrer seul.

Quand le régime permanent est établi la valeur moyenne du couple est :

$$C_{moy} = \frac{\Phi_o\, I\, S}{2} \cos \alpha$$

La valeur moyenne maximum est :

$$C_{max} = \frac{\Phi\, I\, S}{2}$$

Nota : Dans tous les moteurs dont nous venons d'étudier sommairement le fonctionnement, car nous n'avons pas tenu compte de la réaction d'armature etc., l'induit, au lieu d'être formé d'une seule spire, pourrait être formé de m spires faisant entre elles des angles égaux à $\frac{\pi}{m}$.

Les moteurs auraient encore les mêmes propriétés, il suffirait de remplacer dans les relations donnant la valeur moyenne du couple,

$$\cos\alpha, \text{ par } \cos\alpha + \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{m}\right)+\ldots\ldots+\cos\left(\alpha+\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

$$\cos(\varphi+\alpha), \text{ par } \cos(\varphi+\alpha)+\cos\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{m}\right)+\ldots\ldots+\cos\left(\varphi+\alpha+\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

$$\sin\alpha, \text{ par } \sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{m}\right)+\ldots\ldots+\sin\left(\alpha+\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

$$\sin(\varphi+\alpha), \text{ par } \sin(\varphi+\alpha)+\sin\left(\varphi+\alpha+\frac{\pi}{m}\right)+\ldots\ldots+\sin\left(\varphi+\alpha+\frac{m-1}{m}\pi\right)$$

e. *Moteur à induit constitué par des circuits fermés.*

L'intensité du champ pourra être représentée à chaque instant par :

$$\Phi = \Phi_o \sin kt$$

Supposons l'induit formé de m cadres disposés symétriquement autour d'un axe commun, perpendiculaire à la direction du champ et faisant par conséquent entre eux des angles $\frac{\pi}{m}$.

Si le premier cadre fait à l'instant donné l'angle $k't+\alpha$, avec la direction du champ, le deuxième fera l'angle $k't+\alpha+\frac{\pi}{m}$, le $n^{ième}$ l'angle $k't+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi$ etc...

Le flux de force traversant le $n^{ième}$ cadre à l'instant t sera, si S est sa surface totale :

$$\Phi_n = \Phi_o S \sin kt \sin\left(k't+\alpha+\frac{(n-1)\pi}{m}\right)$$

et comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left\{\cos(a-b)-\cos(a+b)\right\}$$

$$\Phi_n = \frac{\Phi_o S}{2}\left\{\cos\left\{(k-k')t-\alpha-\frac{n-1}{m}\pi\right\}-\cos\left\{(k+k')t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi\right\}\right\}$$

La f.e.m. développée dans le circuit sera :

$$e_n = -\frac{d\Phi_n}{dt} = \frac{\Phi_o S}{2}\left[(k-k')\sin\left\{(k-k')t-\alpha-\frac{n-1}{m}\pi\right\}-(k+k')\right.$$
$$\left.\sin\left\{(k+k')t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi\right\}\right]$$

Dans chaque cadre, il circulera un courant, dont l'intensité sera à chaque instant égale à la différence des intensités de deux courants périodiques simples. Il est facile de voir que dans l'ensemble des cadres formant l'induit, il circulera deux systèmes de courants polyphasés de la 1re catégorie; d'après ce que nous avons vu, (page 153) pour avoir l'intensité de chacun de ces courants, il faudra admettre que le coefficient de s. i. de ce cadre l,est multiplié par $\frac{m}{2}$, on aura :

$$L = \frac{m\ l}{2}$$

Si r est la résistance du circuit, on aura, en posant:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(k-k')L}{r} = \frac{(k-k')\ m\ l}{2\ r} \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(k+k')\ L}{r} = \frac{(k+k')\ m\ l}{2\ r}$$

$$i_n = \frac{\Phi_o S}{2\ r}\left[(k-k')\cos\varphi_1 \sin\left\{(k-k')\ t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_1\right\} - (k+k')\right.$$

$$\left.\cos\varphi_2 \sin\left\{(k+k')\ t + \alpha + \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_2\right\}\right]$$

Le couple auquel est soumis le *nième* cadre est :

$$C_n = \Phi_n i_n = \frac{\Phi_o^2 S^2}{4\ r}\left\{(k-k')\cos\varphi_1\left[\sin\left\{(k-k')\ t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_1\right\}\right.\right.$$

$$\left.\cos\left\{(k-k')\ t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi\right\} - \sin\left\{(k-k')\ t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_1\right\}\right.$$

$$\left.\cos\left\{k+k')\ t + \alpha + \frac{n-1}{m}\pi\right\}\right] - (k+k')\cos\varphi_2\left[\sin\left\{(k+k', t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi - \varphi_2\right\}\right.$$

$$\cos\left\{(k-k')t - \alpha - \frac{n-1}{m}\pi\right\} - \sin\left\{(k+k')\ t + \alpha + \frac{n-1}{m}\pi - \varphi_2\right\}$$

$$\left.\left.\cos\left\{(k+k')\ t + \alpha + \frac{n-1}{m}\pi\right\}\right]\right\}$$

comme :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\right\}$$

$$C_n = \frac{\Phi_o^2 S^2}{8r}\left\{(k-k')\cos\varphi_1\left[\sin\left\{2(k-k')t - 2\alpha - \frac{2(n-1)}{m}\pi - \varphi_1\right\}\right.\right.$$

$$\left. + \sin(-\varphi_1) - \sin(2kt-\varphi_1) - \sin\left\{-2k't - 2\alpha - \frac{2(n-1)}{m}\pi - \varphi_1\right\}\right]$$

$$-(k+k')\cos\varphi_2\left[\sin(2kt-\varphi_2) + \sin\left\{2k't + 2\alpha + \frac{2(n-1)}{m}\pi - \varphi_2\right\}\right.$$

$$\left.\left. - \sin\left\{2(k+k')t + 2\alpha + \frac{2(n-1)}{m}\pi - \varphi_2\right\} - \sin(-\varphi_2)\right]\right\}$$

Le couple total sera égal à la somme des couples partiels ; en remarquant que la somme des sinus de m angles qui forment une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{m}$ est égale à zéro, on aura :

$$C = \frac{m\Phi_o^2 S^2}{8r}\left[(k-k')\cos\varphi_1\left[-\sin\varphi_1 - \sin(2kt-\varphi_1)\right] - (k+k')\cos\varphi_2\right.$$

$$\left.\left[\sin(2kt-\varphi_2) - \sin(-\varphi_2)\right]\right]$$

La valeur instantanée absolue du couple total est donc :

$$C = \frac{m\Phi_o^2 S^2}{8r}\left[(k-k')\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + (k+k')\sin\varphi_2\cos\varphi_2 + (k-k')\cos\varphi_1\right.$$

$$\left.\sin(2kt-\varphi_1) + (k+k')\cos\varphi_2\sin(2kt-\varphi_2)\right]$$

Le couple moteur varie donc périodiquement et la durée de sa période $T = \frac{\pi}{k}$, est moitié de celle du courant circulant dans l'inducteur.

Sa valeur moyenne est :

$$C_{moy} = \frac{m\Phi_o^2 S^2}{8r}\left\{(k-k')\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + (k+k')\sin\varphi_2\cos\varphi_2\right\}$$

Car la valeur moyenne $\sin(x-a)$ prise entre o et 2π est nulle.

Nous avons en posant :

$$c = \frac{L}{r} = \frac{ml}{2r}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{(k - k')\, m\, l}{2\, r} = c\,(k - k') \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(k + k')\, m\, l}{2\, r} = c\,(k + k')$$

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \frac{c\,(k - k')}{1 + c^2\,(k - k')^2}$$

$$\sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = \frac{c\,(k + k')}{1 + c^2\,(k + k')^2}$$

$$(k - k') \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + (k + k') \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = \frac{c\,(k - k')^2}{1 + c^2\,(k - k')^2} + \frac{c\,(k + k')^2}{1 + c^2\,(k + k')^2}$$

$$C_m = \frac{m\, \Phi_o^2\, S^2}{8\, r}\, c \left\{ \frac{(k - k')^2}{1 + c^2\,(k - k')^2} + \frac{(k + k')^2}{1 + c^2\,(k + k')^2} \right\}.$$

$$C_m = \frac{m \Phi_o^2\, S^2}{8}\, L \left\{ \frac{(k + k')^2}{r^2 + L^2\,(k + k')^2} + \frac{(k - k')^2}{r^2 + L^2\,(k - k')^2} \right\}$$

$$C_m = \frac{1}{2}\, m^2\, \Phi_o^2\, S^2\, l \left\{ \frac{(k + k')^2}{4\, r^2 + m^2\, l^2\,(k + k')^2} + \frac{(k - k')^2}{4\, r^2 + m^2\, l^2\,(k - k')^2} \right\}$$

Pour $k' = o$, c'est-à-dire au démarrage, la valeur moyenne du couple moteur sera :

$$C_d = \frac{m\, \Phi_o^2\, S^2}{8\, r}\, c\, \frac{2\, k^2}{1 + k^2\, c^2}$$

On a donc affaire à un moteur asynchrone pouvant démarrer seul quand le couple résistant ne dépasse pas une certaine valeur C_d.

Rendement.

Le produit du carré de l'intensité du courant par la résistance, pour le $n^{ième}$ circuit sera :

$$r\, i_n^2 = \frac{\Phi_o^2 S^2}{4\, r} \Big[(k - k')^2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \Big\{ (k - k')\, t + \alpha - \frac{n - 1}{m}\, \pi - \varphi_1 \Big\}$$

$$+ (k + k')^2 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \Big\{ (k + k')\, t + \alpha + \frac{n - 1}{m}\, \pi - \varphi_2 \Big\}$$

$$- 2\,(k - k')\,(k + k') \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \Big\{ (k - k')\, t - \alpha - \frac{n - 1}{m}\, \pi - \varphi_1 \Big\}$$

$$\sin\left\{(k+k')\,t+\alpha+\frac{n-1}{m}\pi-\varphi_2\right\}\Big]$$

Comme :

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha).$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\Big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big]$$

$$r\,i_n^2=\frac{\Phi_o^2S^2}{8r}\Big[(k-k')^2\cos^2\varphi_1-(k-k')^2\cos^2\varphi_1\cos\Big\{2(k-k')$$

$$-2\alpha-\frac{2(n-1)}{m}\pi-2\varphi_1\Big\}+(k+k')^2\cos^2\varphi_2-(k+k')^2\cos^2\varphi_2$$

$$\cos\Big\{2(k+k')\,t+2\alpha+\frac{2(n-1)}{m}\pi-2\varphi_2\Big\}-2(k-k')(k+k')\cos\varphi_1\cos\varphi_2$$

$$\cos\Big\{-2k't-2\alpha-\frac{2(n-1)}{m}\pi-\varphi_1+\varphi_2\Big\}+2(k-k')(k+k')$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Big\{2\,kt-\varphi_1-\varphi_2\Big\}\Big]$$

La somme des quantités telles que ri_n^2 pour les m cadres, qui est le travail perdu dans les circuits, en remarquant que la somme des cosinus de m angles formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{m}$ est nulle (page 21), sera :

$$\Sigma\,ri^2=\frac{\Phi_o^2S^2}{8r}\Big[m(k-k')^2\cos^2\varphi_1+m(k+k')^2\cos^2\varphi_2+2m(k-k')(k+k')$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Big\{2\,kt-\varphi_1-\varphi_2\Big\}\Big]$$

Le travail moyen perdu dans les cadres par suite de leur résistance sera donc :

$$T_p=\frac{m\Phi_o^2S^2}{8r}\Big((k-k')^2\cos^2\varphi_1+(k+k')^2\cos^2\varphi_2\Big)$$

Comme,

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+tg^2\alpha}$$

on aura :

$$T_p = \frac{m \Phi_o^2 S^2}{8 r} \left\{ \frac{(k - k')^2}{1 + c^2 (k - k')^2} + \frac{(k + k')^2}{1 + c^2 (k + k')^2} \right.$$

Le travail moyen du couple, puisque sa vitesse angulaire moyenne est k', sera :

$$k' C_m = \frac{m k' \Phi_o S^2 c}{8 r} \left\{ \frac{(k - k')^2}{1 + c^2 (k - k')^2} + \frac{(k + k')^2}{1 + c^2 (k + k')^2} \right\}$$

Le rendement en ne tenant compte que de la perte dans l'induit sera :

$$R' = \frac{k' C_m}{k' C_m + T_p} = \frac{m \frac{k' \Phi_o^2 S^2}{8 r} c}{m \frac{k' \Phi_o^2 S^2}{8 r} c + \frac{m \Phi_o^2 S^2}{8 r}} = \frac{k' c}{k' c + 1}$$

Comme $c = \frac{L}{r} = \frac{m l}{2 r}$, on aura :

$$R' = \frac{k' \frac{m l}{2 r}}{1 + \frac{k' m l}{2 r}} = \frac{k' m l}{2 r + k' m l} = \frac{k' L}{r + k' L}$$

Le rendement augmenté avec k', dont la valeur se déduit de celle du couple résistant, il est d'autant plus grand que l est plus grand et que r est plus petit.

§ 4. — MOTEURS A CHAMP TOURNANT.

Comme ce genre de moteurs tend de plus en plus à se répandre, nous étudierons plus en détail leur fonctionnement en tenant compte des réactions d'armature etc.

a) *Moteurs synchrones.*

Soit k la vitesse angulaire du champ tournant et Φ_0 son intensité.

Supposons qu'un cadre pouvant tourner autour d'un axe se confondant avec celui du champ, soit parcouru par un courant continu d'intensité I.

Ce cadre se mettra à tourner dans le champ avec une vitesse k' et

rants de Foucault, le travail moteur sera égal au travail utile augmenté des pertes de travail dues à l'échauffement des cadres de l'inducteur et de celui de l'induit.

Si l'inducteur comporte n cadres, de résistance R, et si l'intensité maximum des courants est I_1, la perte par échauffement sera :

$$\frac{n\,R\,I_1^2}{2}$$

La perte dans l'induit, si la résistance du circuit le constituant, est r, sera :

$$r\,I^2$$

Le rendement du moteur sera :

$$R_t = \frac{k\,C}{k\,C + n\,\frac{R\,I_1^2}{2} + r\,I^2} = \frac{k\,\Phi_o\,S\,I\,\sin\alpha}{k\,\Phi_o\,S\,I\,\sin\alpha + \frac{n\,R\,I_1^2}{2} + r\,I^2}$$

Réaction d'armature. — Le courant continu qui circule dans le cadre de l'induit, donne naissance à un champ magnétique constant dont l'intensité sera :

$$\Phi'_o = \Phi'\,I$$

Φ' étant l'intensité du champ quand le cadre est parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité.

La direction de ce champ est perpendiculaire à la spire, il fait donc avec le champ tournant un angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$ comme ce dernier fait avec le premier cadre de l'inducteur un angle kt, le champ dû à la réaction de l'armature fera donc un angle $kt - \frac{\pi}{2} + \alpha$, avec le premier cadre de l'inducteur.

1° *Le champ inducteur est de la première catégorie.*

Les n cadres de l'inducteur font entre eux des angles égaux à $\frac{\pi}{n}$ et les courants sont décalés de $\frac{\pi}{n}$.

Le champ dû à la réaction de l'armature, fait avec le p^{ième} cadre un angle :

fera en un instant donné, un angle β avec la direction de ce dernier, et on aura :

$$\beta = (k - k')\, t + \alpha$$

α étant une constante, exprimant l'angle que fait à l'origine du temps, la face négative du cadre avec le champ.

Le flux de force traversant le cadre sera, si S est sa surface :

$$\Phi_1 = \Phi_o \, S \sin \left\{ (k - k')\, t + \alpha \right\}$$

L'énergie du cadre dans le champ, ou le couple moteur sera :

$$C = \Phi_o \, S \, I \sin \left\{ (k - k')\, t - \alpha \right\}$$

La valeur moyenne du couple sera nulle, tant que l'on n'aura pas $k = k'$.

Il faudra donc lancer l'induit qui ne pourra démarrer seul, quand il aura atteint la vitesse du champ, *le couple sera constant* et sa valeur sera :

$$C = \Phi_o \, S \, I \sin \alpha$$

Le couple sera maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et on aura :

$$C_{max} = \Phi_o \, S \, I$$

Comme le cadre tourne dans l'espace avec la même vitesse que le champ, celui-ci sera immobile par rapport au cadre, *de sorte qu'il n'y aura aucun effet d'induction*, si donc, on applique aux extrémités de la spire une f. e. m. constante, I sera constant :

Ce moteur est le seul qui soit *absolument synchrone*, car le couple est constant, tandis que dans les autres moteurs le couple varie, ce qui peut amener une légère variation de la vitesse.

Rendement.

Le travail du moteur, puisque sa vitesse angulaire est k, sera :

$$T_u = k\, C = k \, \Phi_o \, S \, I \sin \alpha$$

Si l'on ne tient pas compte des pertes par hystérésis et par cou-

rants de Foucault, le travail moteur sera égal au travail utile augmenté des pertes de travail dues à l'échauffement des cadres de l'inducteur et de celui de l'induit.

Si l'inducteur comporte n cadres, de résistance R, et si l'intensité maximum des courants est I_1, la perte par échauffement sera :

$$\frac{n\,R\,I_1^2}{2}$$

La perte dans l'induit, si la résistance du circuit le constituant, est r, sera :

$$r\,I^2$$

Le rendement du moteur sera :

$$R_t = \frac{k\,C}{k\,C + n\,\frac{R\,I_1^2}{2} + r\,I^2} = \frac{k\,\Phi_o\,S\,I\sin\alpha}{k\,\Phi_o\,S\,I\sin\alpha + \frac{n\,R\,I_1^2}{2} + r\,I^2}$$

Réaction d'armature. — Le courant continu qui circule dans le cadre de l'induit, donne naissance à un champ magnétique constant dont l'intensité sera :

$$\Phi'_o = \Phi'\,I$$

Φ' étant l'intensité du champ quand le cadre est parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité.

La direction de ce champ est perpendiculaire à la spire, il fait donc avec le champ tournant un angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$ comme ce dernier fait avec le premier cadre de l'inducteur un angle kt, le champ dû à la réaction de l'armature fera donc un angle $kt - \frac{\pi}{2} + \alpha$, avec le premier cadre de l'inducteur.

1° *Le champ inducteur est de la première catégorie.*

Les n cadres de l'inducteur font entre eux des angles égaux à $\frac{\pi}{n}$ et les courants sont décalés de $\frac{\pi}{n}$.

Le champ dû à la réaction de l'armature, fait avec le p^{ième} cadre un angle :

$$kt + \frac{p-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Le flux de force traversant ce cadre et provenant de la réaction de l'armature sera si S' est la surface de ce cadre :

$$\Phi'_o \, S' \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

La f. e. m. d'induction ou la force contre-électromotrice due à l'armature sera :

$$-k\,\Phi'_o\,S'\cos\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -k\,\Phi_o'\,S'\sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi + \alpha\right)$$

Il est facile de voir que les forces contre-électromotrices seront décalées comme les courants qui circulent dans les cadres, c'est-à-dire qu'il suffira d'appliquer à ces cadres des f. e. m. extérieures de même valeur maximum, décalées de $\frac{\pi}{m}$, pour que les courants soient décalés de $\frac{\pi}{m}$.

Si :

$$e_a = \mathrm{E}_a \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi + \theta\right)$$

est la f. e. m. appliquée au $p^{\text{ième}}$ cadre et si l_1 est le coefficient de l'un des cadres, en posant $\mathrm{L}_1 = \frac{n\,l_1}{2}$ (page 153) on aura :

$$i_n = \mathrm{I}_1 \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi\right)$$

$$\mathrm{E}_a \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi + \theta\right) - k\,\Phi'_o\,S' \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi + \alpha\right)$$

$$-k\,\mathrm{L}_1\,\mathrm{I}_1 \cos\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi\right) - \mathrm{R}\,\mathrm{I}_1 \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi\right) = o$$

Equation qui permet de déterminer E_a, en y faisant successivement $kt + \frac{p-1}{n}\pi = o$ et

$$kt + \frac{p-1}{n}\pi = \frac{\pi}{2}$$

on aura :

$$E_a \sin \theta = k \Phi'_o S' \sin \alpha + k L_i I_i$$
$$E_a \cos \theta = k \Phi'_o S' \cos \alpha + R I_i$$

En élevant ces relations au carré et en les ajoutant, on aura :

$$E_a^2 = k^2 \Phi_o^2 S'^2 + (R^2 + k^2 L_i^2) I_i^2 + 2k \Phi'_o S' I_i (R \cos \alpha + k L_i \sin \alpha)$$

On peut mettre les relations sous une autre forme, on a :

$$\Phi_o = \frac{n \Phi_i I_i}{2}$$

$$\Phi_o S = \frac{n \Phi_i S L}{2}$$

Or, $\Phi_i S$ est le coefficient d'induction mutuelle d'un des cadres de l'inducteur et du cadre de l'induit, quand ils sont situés dans le même plan, désignons ce coefficient par M.

On aura donc :

$$\Phi_o S = \frac{n M I_i}{2}$$

$$\Phi'_o = \Phi' I$$

$$\Phi'_o S' = \Phi' S' I = M I$$

D'où :

$$C = \frac{n M I I_1}{2} \sin \alpha$$

$$E_a^2 = k^2 M^2 I^2 + (R^2 + k^2 L_i^2) I_i^2 + 2k M I I_i (R \cos \alpha + k L_i \sin \alpha)$$

La valeur de α étant déterminée par celle du couple résistant.

2° *Le champ inducteur est de la deuxième catégorie.*

Les n cadres font entre eux des angles égaux à $\frac{2\pi}{n}$ et les courants sont décalés de $\frac{2\pi}{n}$.

Le champ dû à la réaction de l'armature fait avec le $p^{ième}$ cadre de l'inducteur un angle :

$$\left(kt + \frac{2(p-1)}{n} \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Il est facile de voir que comme dans le cas précédent, les forces contre-électromotrices, seront décalées comme les courants, c'est-à-dire qu'il suffira d'appliquer aux cadres de l'inducteur de f. e. m. extérieures décalées de $\frac{2}{n}\pi$ d'un cadre à l'autre, et que la valeur maximum de ces f. e. m. sera donnée par la même relation que celle trouvée ci-dessus.

b) *Moteurs asynchrones à champ tournant.*

Admettons, de suite que l'induit est formé de m cadres, disposés symétriquement autour d'un axe commun, se confondant avec l'axe du champ tournant.

Examinons d'abord ce qui se passe quand un système de m cadres, constitué comme l'induit est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme, tournant autour de lui avec une vitesse angulaire uniforme k_1.

Soit Φ_0, l'intensité du champ magnétique, S la surface de l'un des cadres et β l'angle que fait à un instant donné le premier cadre avec la direction du champ.

Le flux de force traversant ce cadre sera :

$$\Phi_1 = \Phi_0 \sin \beta$$

Le mouvement étant uniforme et la vitesse k_1, on pourra poser :

$$\beta = k_1 t + \alpha$$

On aura donc :

$$\Phi_1 = \Phi_0 \, S \sin (k_1 t + \alpha)$$

Le flux traversant au même instant le deuxième cadre sera :

$$\Phi_2 = \Phi_0 \, S \sin \left(k_1 t + \alpha + \frac{\pi}{m}\right)$$

Le flux traversant le $p^{\text{ième}}$ cadre sera :

$$\Phi_p = \Phi_0 \, S \sin \left(k_1 t + \alpha + \frac{p-1}{m} \pi\right)$$

Les circuits des cadres seront soumis à des f. e. m. d'induction :

$$e'_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -k_1 \Phi_0 \, S \cos(k_1 t + \alpha) = k_1 \Phi_0 \, S \sin\left(k_1 t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$e'_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -k_1 \Phi_0 \, S \cos\left(k_1 t + \alpha + \frac{\pi}{m}\right) = k_1 \Phi_0 \, S \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$e'_p = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -k_1 \Phi_0 S \cos\left(k_1 t + \alpha + \frac{p-1}{m}\pi\right) = k_1 \Phi_0 S \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{p-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Les f. e. m. auxquelles sont soumis les m cadres, ont donc même valeur maximum et sont décalées de $\frac{\pi}{m}$, d'un cadre à l'autre, les intensités des courants circulant dans les cadres seront donc trouvées, d'après la règle donnée page 153, en admettant que le coefficient de s. i. de chacun de ces derniers est $L = \frac{m\,l}{2}$, l étant le coefficient de s. i. de l'un d'eux supposé isolé.

Si φ est l'angle de retard, les intensités des courants circulant dans les cadres seront :

$$i'_1 = X \sin\left(k_1 t + \alpha - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$i'_p = X \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{p-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$i'_m = X \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{m-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

Nous aurons (voir page 31), si r est la résistance du circuit d'un cadre :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 L}{r} \qquad \cos\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + k_1^2 L^2}}$$

$$X = \frac{k_1 \Phi_0 S}{\sqrt{r^2 + k_1^2 L^2}}$$

L'énergie de chacun des cadres dans le champ, ou le couple tendant à le faire tourner sera égale au produit de l'intensité du courant par le flux de force qui le traverse. Le couple total tendant à faire tourner le système entier, sera égal à la somme des couples partiels.

$$C_t = i'_1 \Phi_1 + \ldots + i'_p \Phi_p + \ldots + i'_m \Phi_m = \Phi_o \, 8X \left\{ \sin (k_1 t + \alpha) \right.$$

$$\sin\left(k_1 t + \alpha - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \ldots + \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{p-1}{m}\pi\right)$$

$$\sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{p-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \ldots + \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{m-1}{m}\pi\right)$$

$$\left. \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{m-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \right\}$$

Comme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

nous aurons :

$$C_t = \frac{\Phi_o \, S \, X}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - \cos\left(2k_1 t + 2\alpha - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \ldots\ldots \right.$$

$$\ldots\ldots + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - \cos\left(2 k_1 t + 2\alpha + \frac{2(p-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \ldots$$

$$+ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - \cos\left(2k_1 t + 2\alpha + \frac{2(m-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

Comme la somme des cosinus de m angles, formant une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{m}$, est égale à zéro (page 21), nous aurons :

$$C_t = \frac{\Phi_o \, S \, X}{2} m \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\frac{\Phi_o \, S \, X}{2} m \sin\varphi$$

Le couple sera donc constant et sa valeur absolue sera :

$$C_t = \frac{m \, \Phi_o \, S}{2} \, \frac{k_1 \Phi_o \, S}{\sqrt{r^2 + k_1^2 L^2}} \, \frac{k_1 \, L}{\sqrt{r^2 + k_1^2 L^2}} = \frac{k_1^2 \, m \, L \, \Phi_o^2 \, S^2}{2(r^2 + k_1^2 L^2)}$$

Ce couple dépend donc de k_1 vitesse angulaire du champ.

Supposons maintenant l'induit mobile, formé du système des m cadres, placé dans le champ tournant, de manière que son axe se confonde avec celui-ci. Suivant la valeur du couple résistant, l'induit prendra dans l'espace une vitesse angulaire k' et le champ tournant aura, par rapport à lui, une vitesse $k_1 = k - k'$.

k_1 variera donc entre k et o, le couple sera maximum pour $k_1 = k$ (voir page 98), $k' = o$, c'est-à-dire au démarrage.

Le couple sera nul pour $k_1 = o$, c'est-à-dire $k' = k$, quand l'induit aura la même vitesse que le champ, ce qui ne peut jamais arriver à cause des résistances passives.

On aura donc un moteur ayant un couple maximum au démarrage et ne pouvant dépasser une vitesse donnée, c'est-à-dire jouissant à la fois des avantages des moteurs à courant continu, en série et en dérivation.

L'expression du couple est :

$$C_t = \frac{1}{2} \frac{(k - k')^2 m L \Phi_o^2 S^2}{r^2 + (k - k')^2 L^2}$$

Nous avons $L = \frac{m l}{2}$, l étant le coefficient de s. i. d'un cadre supposé isolé :

$$C_t = \frac{1}{2} \frac{(k - k')^2 m^2 \frac{l}{2} \Phi_o^2 S^2}{r^2 + (k - k')^2 \frac{m^2 l^2}{4}} = \frac{(k - k')^2 m^2 l \Phi_o^2 S^2}{4 r^2 + (k - k')^2 m^2 l^2}$$

Si l'inducteur est formé de n, cadres parcourus, soit par des courants polyphasés de la première, soit de la deuxième catégorie, on a :

$$\Phi_o = \frac{n \Phi}{2} I \text{ (pages 152 et 156).}$$

I étant l'intensité maximum des courants et Φ l'intensité du champ, dû à un courant d'intensité égale à l'unité circulant dans un des circuits, nous aurons donc :

$$C_t = \frac{1}{8} \frac{(k - k')^2 m n^2 L \Phi^2 S^2 I^2}{r^2 + (k - k')^2 L^2} = \frac{1}{4} \frac{(k - k')^2 m^2 n^2 l \Phi^2 S^2 I^2}{4 r^2 + (k - k')^2 m^2 l^2}$$

Mais ΦS est le coefficient d'induction mutuelle de l'un des cadres de l'induit et de l'un des cadres de l'inducteur, quand leurs plans coïncident, désignons ce coefficient par M, nous aurons :

$$C_t = \frac{1}{8}\,\frac{(k-k')^2\, m\, n^2\, L\, M^2\, I^2}{r^2 + (k-k')^2\, L^2} = \frac{1}{4}\,\frac{(k-k')^2\, m^2\, n^2\, l\, M^2\, I^2}{4\, r^2 + (k-k')^2\, m^2\, l^2}$$

Le couple sera d'autant plus grand que M sera plus grand et r plus petit. Cherchons la valeur de l, rendant le couple maximum pour une valeur donnée de k', vitesse de rotation de l'induit, il faut chercher le maximum de :

$$\frac{l}{4\, r^2 + (k-k')^2\, m^2\, l^2}$$

Prenons la dérivée par rapport à l et égalons-la à zéro, nous aurons :

$$4\, r^2 + (k-k')^2\, m^2\, l^2 - 2\,(k-k')^2\, m^2\, l^2 = o$$

$$(k-k')^2\, m^2\, l^2 = 4\, r^2$$

$$l = \frac{2\, r}{m\,(k-k')}$$

Si le couple doit être maximum au démarrage, on doit avoir :

$$l = \frac{2r}{k\, m} \text{ ou } L = \frac{r}{k}$$

La vitesse angulaire de l'induit étant k', le travail fourni par le moteur sera :

$$T_u = k'\, C_t = \frac{1}{8}\,\frac{k'\,(k-k')^2\, m\, n^2\, L\, M^2}{r^2 + (k-k')^2\, L^2}\, I^2 = \frac{1}{4}\,\frac{k'\,(k-k')^2\, m^2\, n^2\, l\, M^2}{r^2 + (k-k')^2\, m^2\, l^2}\, I^2$$

Le travail du moteur est susceptible d'un maximum, pour une certaine valeur de k', que l'on pourra trouver en prenant la dérivée, par rapport à k' et en l'égalant à o.

Rendement. — Si on ne tient pas compte des pertes par hystérésis et par courants de Foucault, le travail fourni sera égal au travail produit augmenté des pertes par échauffement dans les inducteurs et dans l'induit.

Les intensités des courants circulant dans les inducteurs étant exprimés, soit par :

$$i_p = I \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\,\pi\right)$$

soit par :

$$i_p = \mathrm{I} \sin\left(kt + \frac{2(p-1)}{n}\,\pi\right)$$

Si R est la résistance d'un des circuits de l'inducteur, la perte moyenne de travail par circuit sera $\frac{\mathrm{R\,I^2}}{2}$ et la perte totale $\frac{n\,\mathrm{R\,I^2}}{2}$.

Les intensités des courants circulant dans l'induit étant exprimées par des relations de la forme :

$$i'_p = \mathrm{X} \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{p-1}{m}\,\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

La perte moyenne de travail par circuit sera $\frac{r\,\mathrm{X^2}}{2}$ et la perte totale $\frac{m\,r\,\mathrm{X^2}}{2}$.

Le rendement sera :

$$\mathrm{R}^t = \frac{\mathrm{T}_u}{\mathrm{T}_u + \frac{m\,r\,\mathrm{X^2}}{2} + n\mathrm{R}\frac{\mathrm{I^2}}{2}} = \frac{k'\,\mathrm{C}t}{k'\,\mathrm{C}_t + \frac{m\,r\,\mathrm{X^2}}{2} + n\,\mathrm{R}\,\frac{\mathrm{I^2}}{2}}$$

$$\mathrm{R}^t = \frac{\frac{k'\,(k-k')^2\,m\,\mathrm{L}\,\Phi_o^2\,\mathrm{S^2}}{2\left\{r^2 + (k-k')^2\,\mathrm{L}^2\right\}}}{\frac{k'\,(k-k')^2\,m\,\mathrm{L}\,\Phi_o^2\,\mathrm{S^2}}{2\left\{r^2 + (k-k')^2\,\mathrm{L}^2\right\}} + \frac{m\,r\,(k-k')^2\,\Phi_o^2\,\mathrm{S^2}}{2\left\{r^2 + (k-k')^2\,\mathrm{L}^2\right\}} + n\,\mathrm{R}\,\frac{\mathrm{I^2}}{2}}$$

Si R est assez petit pour que l'on puisse négliger le terme $n\,\mathrm{R}\,\frac{\mathrm{I^2}}{2}$, on aura :

$$\mathrm{R}^t = \frac{k'\,(k-k')^2\,m\,\mathrm{L}\,\Phi_o^2\,\mathrm{S^2}}{k'\,(k-k')^2\,m\,\mathrm{L}\,\Phi_o^2\,\mathrm{S^2} + m\,r\,(k-k')^2\,\Phi_o^2\,\mathrm{S^2}}$$

$$\mathrm{R}^t = \frac{k'\,\mathrm{L}}{k'\,\mathrm{L} + r} = \frac{1}{1 + \frac{r}{k'\,\mathrm{L}}} = \frac{1}{1 + \frac{2\,r}{k'\,m\,l}}$$

Le rendement sera d'autant meilleur que r sera plus petit et l ou L, plus grand. Il sera d'autant plus élevé que k' sera plus grand.

Les moteurs asynchrones à champ tournant les plus simples sont ceux dans lesquels l'induit est constitué par un cylindre de fer doux.

Il se développe dans ce cylindre des courants de Foucault dont la

réaction le fait tourner avec une vitesse plus ou moins grande, dépendant du couple résistant.

Ce genre de moteur n'a pas un bon rendement, car les courants induits ne peuvent être canalisés de manière à donner lieu à leur utilisation la plus grande, mais par contre la construction en est des plus simples et par conséquent le prix de revient peu élevé.

Angle du champ magnétique inducteur et du champ induit.

Les cadres de l'induit sont parcourus par des courants, dont les intensités sont (page 241) :

$$i'_1 = X \sin\left(k_1 t + \alpha - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$i'_p = X \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{p-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$i'_m = X \sin\left(k_1 t + \alpha + \frac{m-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

Ces courants donnent donc naissance à un champ magnétique tournant dont l'intensité est :

$$\Phi'_o = \frac{m\,\Phi'\,X}{2}$$

Φ' étant l'intensité du champ quand le cadre est parcouru par un courant d'intensité égale à l'unité (page 152).

Ce champ fait à l'instant t, l'angle $k_1 t + \alpha - \frac{\pi}{2} - \varphi$ avec le premier cadre (page 153) et tourne avec une vitesse $k_1 = k - k'$ par rapport à l'induit et avec une vitesse $k_1 + k' = k$ dans l'espace, c'est-à-dire avec la même vitesse que le champ inducteur.

Le champ inducteur, fait à l'instant t, un angle $k_1\ t + \alpha$ avec le premier cadre de l'induit, on voit donc que le champ dû à la réaction de l'induit, sera en retard d'un angle $\frac{\pi}{2} + \varphi$, par rapport au champ inducteur.

L'angle φ étant déterminé par la relation :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 L}{r} = \frac{(k - k') L}{r} \text{ (page 241)}$$

Quand $k' = o$, c'est-à-dire au démarrage, φ est maximum (car φ est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$).

Quand le moteur tourne à sa vitesse maximum, φ est minimum, si l'induit pouvait atteindre la vitesse k, les deux champs seraient alors à angle droit.

Réaction d'armature.

1° *Le champ tournant inducteur est dû à des courants polyphasés de la première catégorie.*

L'inducteur est constitué par n cadres, faisant entre eux des angles $\frac{\pi}{n}$ et parcourus par des courants décalés de $\frac{\pi}{n}$ d'un cadre à l'autre.

A l'instant t, le champ inducteur fait un angle $kt + \frac{p-1}{n}\pi$, avec le $p^{\text{ième}}$ cadre de l'induit, le champ induit fera donc un angle $kt + \frac{p-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi$, avec ce cadre. Si S' est la surface d'un des cadres, le flux traversant le $p^{\text{ième}}$ cadre sera :

$$\Phi'_p = \Phi'_o S' \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{m\,\Phi'\,S'}{2} \times \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

Mais $\Phi' S'$ est le coefficient d'induction mutuelle d'un cadre de l'induit et d'un cadre de l'inducteur, placés dans le même plan, nous aurons donc :

$$\Phi' S' = M$$

$$\Phi'_p = \frac{m M}{2} \times \sin\left(kt + \frac{p-1}{n}\pi - \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

La f. e. m. d'induction, qui sera la force contre-électromotrice due à la réaction de l'armature, sera :

$$e''_p = -\frac{k\,m\,M}{2}\,X\cos\left(kt+\frac{p-1}{n}\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=-\frac{k\,m\,M\,X}{2}\sin\left(kt+\frac{p-1}{n}\pi-\varphi\right)$$

Il est facile de voir que les forces contre-électromotrices seront décalées de $\frac{\pi}{n}$ d'un cadre à l'autre, il suffira donc d'appliquer à chacun d'eux, des f. e. m. extérieures de même valeur maximum, décalées de $\frac{\pi}{n}$ d'un cadre à l'autre. Si E_a, est la valeur maximum commune des f. e. m. appliquées, la valeur instantanée de la f. e. m. appliquée au *pième* cadre, sera :

$$e''_a = E_a \sin\left(kt+\frac{p-1}{n}\pi-\theta\right)$$

La valeur instantanée de l'intensité du courant sera :

$$i''_p = I \sin\left(kt+\frac{p-1}{n}\pi\right)$$

En appliquant la loi de Ohm à ce circuit, on aura, si $L_i=\frac{n\,l_i}{2}$ est le coefficient de s. i et R la résistance d'un cadre.

$$e''_a + e''_p - L_i\frac{d\,i''_p}{d\,t} - R\,i''_p = o$$

$$E_a \sin\left(kt+\frac{p-1}{n}\pi-\theta\right)=\frac{k\,m\,M\,X}{2}\sin\left(kt+\frac{p-1}{n}\pi-\varphi\right)$$

$$+\,k\,L_i\,I\cos\left(kt+\frac{p-1}{n}\pi\right)+R\,I\sin\left(kt+\frac{p-1}{n}\pi\right)$$

Pour trouver la valeur de E_a, faisons successivement dans cette équation :

$$kt+\frac{p-1}{n}\pi=o \quad \text{et} \quad kt+\frac{p-1}{n}\pi=\frac{\pi}{2}$$

Nous aurons :

$$-E_a\sin\theta=-A\sin\varphi+k\,L_i\,I$$

$$E_a\cos\theta=A\cos\varphi+R\,I$$

En élevant ces deux relations au carré et en les ajoutant, nous aurons :

$$E_a^2 = A^2 + (R^2 + k\,L_1^2)\,I^2 + 2\,A\,I\,(R\cos\varphi - k\,L_1\sin\varphi)$$

$$R\cos\varphi = \frac{R\,r}{\sqrt{r^2+k_1^2\,L^2}} \qquad k\,L^2\sin\varphi = \frac{k\,k_1\,L\,L_1}{\sqrt{r^2+k_1^2\,L^2}} \text{ (page 241)}$$

$$A = \frac{k\,m\,M}{2}\,X = \frac{k\,k_1\,m\,M\,\Phi_o\,S}{2\sqrt{r^2+k_1^2\,L^2}} = \frac{k\,k_1\,m\,n\,M^2}{4\sqrt{r^2+k_1^2\,L^2}}\,I$$

Nous aurons donc :

$$E_a^2 = \left\{\frac{k^2\,k_1^2\,m^2\,n^2\,M^4}{16\,(r^2+k_1^2\,L^2)} + R^2 + k^2\,L_1^2 + \frac{k\,k_1\,m\,n\,M^2}{2(r^2+k_1^2L^2)}\,(R\,r - k\,k_1\,LL_1)\right\} I^2$$

$$E_a^2 = \frac{k^2\,k_1^2\,mn\,M^2\left\{mn\,M^2 - 8\,LL_1\right\} + 16(r^2+k_1^2L^2)(R^2+kL_1^2) + 8\,kk_1\,mn\,Rr\,M^2}{16\,(r^2+k_1^2\,L^2)}\,I^2$$

Comme :

$$L = \frac{m\,l}{2}, \qquad L_1 = \frac{n\,l_1}{2}$$

l et l_1 étant les coefficients de s. i des cadres isolés, on aura :

$$E_a^2 = \frac{k^2k_1^2mn\,M^2(mn\,M^2 - 2mnll_1 + (4r^2+k_1^2m^2l^2)(4R^2+k^2n^2l_1^2) + 8kk_1mn\,Rr\,M^2}{4\,(4\,r^2+k_1^2\,m^2\,l^2)}\,I^2$$

On a très approximativement :

$$ll_1 = M^2$$

car on tâche naturellement dans un tel moteur, de faire en sorte que toutes les lignes de force créées par l'un des cadres de l'inducteur, traversent toutes les spires de l'un des cadres de l'induit, quand les deux cadres sont dans le même plan. On a alors :

$$E_a^2 = \frac{(4\,r^2+k_1^2\,m^2l^2)\,(4\,R^2+k^2n^2l_1^2) + 8\,k\,k_1\,mn\,Rr\,l_1l_2 - k^2k_1^2\,m^2n^2l^2l_1^2}{4\,(4\,r^2+k_1^2\,m^2l^2)}\,I^2$$

$$E_a^2 = \frac{16\,R^2r^2 + 4\,k_1^2m^2l^2R^2 + 4k^2n^2l_1^2r^2 + 8\,kk_1\,mn\,Rr\,ll_1}{4\,(4\,r^2+k_1^2\,m^2\,l^2)}\,I^2$$

$$E_a^2 = \frac{4 R^2 r^2 + (k_1 m l R + k m l_1 r)^2}{4 r^2 + k_1^2 m^2 l^2} I^2$$

$$I^2 = \frac{4 r^2 + k_1^2 m^2 l^2}{4 R^2 r^2 + (k_1 m l R + k m l_1 r)^2} E_a^2$$

$$I^2 = \frac{4 r^2 + (k - k')^2 m^2 l^2}{4 R^2 r^2 + [(k - k') m l R + k m l_1 r]^2} E_a^2$$

Voyons comment varie I^2, ou l'intensité efficace des courants circulant dans les cadres de l'inducteur, quand on maintient constantes les f. e. m. efficaces ou E_a) appliquées à ces derniers.

Prenons la dérivée, par rapport à k_1, comme le dénominateur est un carré, nous n'avons à tenir compte que du numérateur de la dérivée, qui est :

$$8 k_1 m^2 l^2 R^2 r^2 + 2 k_1^2 m^2 l^2 R^2 + 2 k^2 k_1 m^2 m_1^2 l_1^2 r^2 + 4 k k_1^2 m^2 m_1 l^2 l_1 R r$$
$$- 8 k_1 m^2 l^2 R^2 r^2 - 2 k_1^2 m^2 l^2 R^2 - 8 k m m_1 l l_1 R r^2 - 2 k k_1^2 m^2 m_1 l^2 l_1 R r$$
$$= 2 k k_1^2 m^2 m_1 l^2 l_1 R r + 2 k^2 k_1 m^2 m_1^2 l^2 r^2 - 8 k m m_1 l l_1 R r^2$$
$$= 2 k m m_1 l l_1 r (k_1^2 m l^2 R + k k_1 m m_1 l l_1 r - 4 R r^2)$$

Si on a :

$$k^2 m l (m l R + m_1 l_1 r) > 4 R r^2$$

Pour $k_1 = o$ la dérivée est négative, elle s'annule pour une valeur de k_1, comprise entre o et k et devient ensuite positive.

L'intensité efficace est donc maximum, pour $k_1 = o$ et pour $k_1 = k$, elle sera donc maximum au démarrage, puis décroîtra jusqu'à un minimum, correspondant à une vitesse k' comprise entre o et k pour croître ensuite jusqu'à ce que le moteur ait atteint sa vitesse maximum k.

Si on a :

$$k^2 m l (m l R + m_1 l_1 r) = 4 R r^2$$

La dérivée sera toujours négative, l'intensité efficace des courants de l'inducteur diminuera avec k_1, c'est-à-dire augmentera avec k', elle sera donc minimum au démarrage et croîtra ensuite pour atteindre son maximum quand k' sera égal à k.

On voit donc que l'*intensité efficace des courants de l'inducteur est maximum*, soit *au démarrage*, soit quand *le moteur a atteint sa vitesse maximum* k, il suffira donc, au point de vue de l'étude de la section des fils des cadres, de calculer I^2 pour les deux cas, du démarrage et de la vitesse maximum.

Au démarrage on a :

$$I^2 = \frac{4r^2 + k^2m^2l^2}{4R^2r^2 + k^2(mlR + n_1lr)^2} E_a^2$$

Dans le cas de la vitesse maximum du moteur ($k' = k$, $k_1 = o$) on a :

$$I^2 = \frac{4r^2}{4R^2r^2 + k^2n^2l_1^2r^2} E_a^2 = \frac{4}{4R^2 + k^2n^2l_1^2} E_a^2$$

La valeur du *couple moteur* en fonction de la f. e. m. maximum appliquée aux circuits de l'inducteur est :

$$C_t = \frac{1}{4} \cdot \frac{(k - k')^2 m^2n^2l M^2}{4r^2 + (k - k')^2 m^2l^2} \cdot \frac{4r^2 + (k - k')^2 m^2l^2}{4R^2r^2 + \left|(k - k')\, mlR + knl_1r\right|^2} E_a^2$$

$$C_t = \frac{1}{4} \cdot \frac{(k - k')^2 m^2n^2l M^2}{4R^2r^2 + \left|(k - k')\, mlR + knl_1r\right|^2} E_a^2$$

Voyons comment varie le couple, quand on maintient E_a constant. Prenons la dérivée de :

$$\frac{k_1^2}{4R^2r^2 + (k_1mlR + knl_1r)^2}$$

Nous n'avons à tenir compte que du numérateur de la dérivée, le dénominateur étant un carré.

Le numérateur de la dérivée est :

$$8k_1R^2r^2 + 2k_1^2m^2l^2R^2 + 2k^2k_1n^2l_1^2r^2 + 4kk_1^2mnll_1Rr - 2k_1^2m^2l^2R^2$$
$$- 2kk_1^2mnll_1Rr = 2k_1r(kk_1mnll_1R + k^2n^2l_1^2r + 4R^2r)$$

La dérivée est toujours positive, car k_1 est compris entre o et k.

Le couple croît donc quand k_1 augmente, c'est-à-dire quand k' diminue.

$$E_a^2 = \frac{4\,R^2r^2 + (k_1ml\,R + knl_1r)^2}{4\,r^2 + k_1^2m^2l^2}\,I^2$$

$$I^2 = \frac{4\,r^2 + k_1^2m^2l^2}{4\,R^2r^2 + (k_1ml\,R + k\,nl_1r)^2}\,E_a^2$$

$$I^2 = \frac{4\,r^2 + (k - k')^2\,m^2l^2}{4\,R^2r^2 + \left\{(k - k')\,ml\,R + knl_1r\right\}^2}\,E_a^2$$

Voyons comment varie I^2, ou l'intensité efficace des courants circulant dans les cadres de l'inducteur, quand on maintient constantes les f. e. m. efficaces (ou E_a) appliquées à ces derniers.

Prenons la dérivée, par rapport à k_1, comme le dénominateur est un carré, nous n'avons à tenir compte que du numérateur de la dérivée, qui est :

$$\begin{aligned}
&8\,k_1m^2l^2R^2r^2 + 2\,k_1^2m^2l^2R^2 + 2\,k^2k_1m^2n^2l^2l_1^2r^2 + 4\,kk_1^2m^2n\,l^2l_1\,Rr \\
&- 8\,k_1m^2l^2R^2r^2 - 2\,k_1^2m^2l^2R^2 - 8k\,mn\,ll_1\,Rr^2 - 2\,k\,k_1^2\,m^2n\,l^2l_1\,Rr \\
&= 2\,kk_1^2\,m^2nl^2l_1Rr + 2\,k^2k_1\,m^2n^2l^2l_1^2r^2 - 8\,k\,mn\,ll_1\,Rr^2 \\
&= 2\,k\,mn\,ll_1r\,(k_1^2m^2l^2R + kk_1\,mn\,ll_1r - 4\,R\,r^2)
\end{aligned}$$

Si on a :

$$k^2ml\,(ml\,R + nl_1\,r) > 4\,R\,r^2$$

Pour $k_1 = o$ la dérivée est négative, elle s'annule pour une valeur de k_1, comprise entre o et k et devient ensuite positive.

L'intensité efficace est donc maximum, pour $k_1 = o$ et pour $k_1 = k$, elle sera donc maximum au démarrage, puis décroîtra jusqu'à un minimum, correspondant à une vitesse k' comprise entre o et k pour croître ensuite jusqu'à ce que le moteur ait atteint sa vitesse maximum k.

Si on a :

$$k^2ml\,(ml\,R + nl_1r) = 4\,Rr^2$$

La dérivée sera toujours négative, l'intensité efficace des courants de l'inducteur diminuera avec k_1, c'est-à-dire augmentera avec k', elle sera donc minimum au démarrage et croîtra ensuite pour atteindre son maximum quand k' sera égal à k.

On voit donc que l'*intensité efficace des courants de l'inducteur est maximum*, soit *au démarrage*, soit quand *le moteur a atteint sa vitesse maximum* k, il suffira donc, au point de vue de l'étude de la section des fils des cadres, de calculer I^2 pour les deux cas, du démarrage et de la vitesse maximum.

Au démarrage on a :

$$I^2 = \frac{4r^2 + k'^2m^2l^2}{4R^2r^2 + k^2(mlR + n_1lr)^2} E_a^2$$

Dans le cas de la vitesse maximum du moteur ($k' = k$, $k_1 = o$) on a :

$$I^2 = \frac{4r^2}{4R^2r^2 + k^2n^2l_1^2r^2} E_a^2 = \frac{4}{4R^2 + k^2n^2l_1^2} E_a^2$$

La valeur du *couple moteur* en fonction de la f. e. m. maximum appliquée aux circuits de l'inducteur est :

$$C_t = \frac{1}{4} \cdot \frac{(k - k')^2m^2n^2l\,M^2}{4r^2 + (k - k')^2m^2l^2} \cdot \frac{4r^2 + (k - k')^2m^2l^2}{4R^2r^2 + \left|(k - k')\,mlR + knl_1r\right|^2} E_a^2$$

$$C_t = \frac{1}{4} \cdot \frac{(k - k')^2m^2n^2l\,M^2}{4R^2r^2 + \left|(k - k')\,mlR + knl_1r\right|^2} E_a^2$$

Voyons comment varie le couple, quand on maintient E_a constant. Prenons la dérivée de :

$$\frac{k_1^2}{4R^2r^2 + (k_1mlR + knl_1r)^2}$$

Nous n'avons à tenir compte que du numérateur de la dérivée, le dénominateur étant un carré.

Le numérateur de la dérivée est :

$$8k_1R^2r^2 + 2k_1^2m^2l^2R^2 + 2k^2k_1n^2l_1^2r^2 + 4kk_1^2mnll_1Rr - 2k_1^2m^2l^2R^2$$
$$- 2kk_1^2mnll_1Rr = 2k_1r\,(kk_1mnll_1R + k^2n^2l_1^2r + 4R^2r)$$

La dérivée est toujours positive, car k_1 est compris entre o et k.

Le couple croît donc quand k_1 augmente, c'est-à-dire quand k' diminue.

Donc, *quand on applique aux bornes des circuits de l'inducteur des f. e. m. efficaces constantes* $\left(\frac{E_a}{\sqrt{2}}\right)$ *le couple est maximum au démarrage.*

Sa valeur est alors :

$$C_d = \frac{1}{4} \frac{k^2 m^2 n^2 l M^2}{4 R^2 r^2 + k^2 (ml R + n l_1 r)^2} E_a^2$$

Le couple est nul quand le moteur atteint sa vitesse maximum. On voit aussi que toutes choses égales, d'ailleurs, *la valeur du couple au démarrage augmente avec* k, *c'est-à-dire avec la fréquence* (page 98),

2° *Le champ inducteur est dû à des courants polyphasés de la deuxième catégorie.*

L'inducteur est constitué par n cadres faisant entre eux des angles $\frac{2\pi}{n}$ et parcourus par des courants décalés de $\frac{2\pi}{n}$, d'un cadre à l'autre.

Le champ inducteur fera à l'instant t, avec le $p^{ième}$ cadre l'angle :

$$kt + \frac{2(p-1)}{n} - \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Il est facile de voir que les conclusions seront les mêmes que dans le cas précédant et que toutes les relations trouvées pourront servir.

CHAPITRE VI

Etude de la décharge des condensateurs.

Actuellement, l'étude de la décharge des condensateurs n'a aucun intérêt au point de vue industriel, mais les belles expériences de M. M. Nikola Tesla et d'Arsonval, font prévoir que prochainement il n'en sera plus de même, aussi avons-nous cru devoir donner un aperçu sommaire de la question (1).

Soient : C la capacité d'un condensateur (ou d'une batterie de bouteilles de Leyde), Q la charge à l'instant où commence l'expérience ; q la charge à l'instant t, V la différence de potentiel aux bornes du condensateur au même instant. On a par définition :

$$q = \mathrm{C}\,\mathrm{V}$$

Si lorsque le potentiel aux bornes du condensateur, ou la charge diminue, nous admettons que le courant est positif, nous aurons :

$$i = -\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$$

Si la décharge a lieu à travers un circuit dont la résistance est r et le coefficient de s. i. L, on aura à chaque instant :

$$\mathrm{V} - \mathrm{L}\frac{di}{dt} - ri = o$$

ou bien :

$$\frac{q}{\mathrm{C}} + r\frac{dq}{dt} + \mathrm{L}\frac{d^2q}{dt^2} = o$$

(1) La question dans toute sa généralité a été étudiée pour la première fois par sir William Thomson.

équation différentielle linéaire du second ordre, que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = o$$

Dans la résolution de cette équation, il y a deux cas à considérer, suivant que les racines du trinôme :

$$m^2 + \frac{r}{L}m + \frac{1}{LC} = o$$

sont réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que l'on a

$$Cr^2 > 4L \quad \text{ou} \quad Cr^2 < 4L$$

Dans le cas où les racines sont réelles, la solution générale est :

$$q = A\,e^{m_1 t} + B\,e^{m_2 t}$$

m_1 et m_2 étant les racines du trinôme, A et B deux constantes d'intégration, que l'on peut déterminer au moyen de solutions particulières.

$$m_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -a + b$$

$$m_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -a - b$$

en posant :

$$a = \frac{r}{2L} \qquad b = \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

nous aurons :

$$q = A\,e^{(-a+b)t} + Be^{(-a-b)t}$$

Pour déterminer A et B, il faut trouver deux solutions particulières de l'équation.

Quand $t = o$, c'est-à-dire à l'origine de la décharge, on doit avoir $q = Q$, nous aurons donc :

$$A + B = Q$$

d'autre part, nous avons :

$$i = -\frac{dq}{dt} = -\left\{(-a+b)\,A\,e^{(-a+b)t} + B\,(-a-b)\,A\,e^{(-a-b)t}\right\}$$

$$i = (a-b)\,A\,e^{(-a+b)t} + (a+b)\,B\,A\,e^{(-a-b)t}$$

pour $t = o$, nous devons avoir $i = o$.

$$(a-b)\,A + (a+b)\,B = o$$

$$a\,(A+B) = b\,(A-B)$$

$$a\,Q = b\,(A-B)$$

$$A - B = \frac{a\,Q}{b}$$

$$A = \frac{(a+b)\,Q}{2\,b}$$

$$B = \frac{(b-a)\,Q}{2\,b}$$

Les équations deviendront :

$$q = \frac{(a+b)}{2\,b}\,Q\,e^{(-a+b)t} + \frac{b-a}{2b}\,Q\,e^{(-a-b)t}$$

$$q = e^{-at}\,\frac{Q}{2\,b}\left\{(a+b)\,e^{bt} + (b-a)\,e^{-bt}\right\}$$

$$i = (b-a)\,\frac{a+b}{2\,b}\,Q\,e^{(-a+b)t} + (a+b)\,\frac{b-a}{2\,b}\,Q\,e^{(-a-b)t}$$

$$i = \frac{b^2 - a^2}{2\,b}\,Q\,e^{-at}\left\{e^{bt} + e^{-bt}\right\}$$

La décharge est donc continue.

En prenant comme abscisses le temps, et comme ordonnées :

1° La différence de potentiel aux bornes du condensateur $V = \frac{q}{C}$ et

2° L'intensité du courant, on obtient des courbes analogues à celles de la figure 54.

On peut chercher la valeur du temps, pour laquelle l'intensité du courant de décharge est maximum, on a :

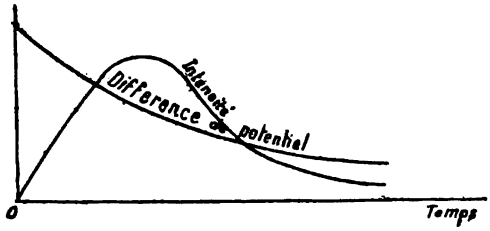


Fig. 54

$$i = \text{constante} \left\{ e^{(-a+b)t} + e^{-(a+b)t} \right\}$$

En prenant la dérivée et en l'égalant à zéro, on aura :

$$(-a+b)\, e^{(-a+b)t} - (a+b)\, e^{-(a+b)t} = o$$

$$(b-a)\, e^{bt} - (a+b)\, e^{-bt} = o$$

$$(b-a)\, e^{2bt} - (a+b) = o$$

$$e^{2bt} = \frac{a+b}{b-a}$$

$$t = \frac{1}{2b} \text{ Log. nep. } \frac{a+b}{a-b}$$

La valeur de l'intensité sera alors :

$$i = \frac{b^2 - a^2}{2b}\, Q\, e^{-(a+b)t} \left(e^{2bt} + 1 \right)$$

$$e^{2bt} = \frac{a+b}{a-b} \qquad e^t = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2b}}$$

$$e^{-(a+b)t} = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{-\frac{a+b}{2b}}$$

$$i = \frac{b^2 - a^2}{2b} Q \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{a+b}{2b}} \left\{\frac{a+b}{a-b} + 1\right\}$$

$$i = \frac{a}{b}(a+b) Q \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{a+b}{2b}}$$

Dans le cas où les racines du trinôme sont imaginaires, si on pose :

$$\frac{r}{2L} = a \qquad \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2} = b^2$$

les racines du trinôme seront :

$$m_1 = -a + b\sqrt{-1}$$

$$m_2 = -a - b\sqrt{-1}$$

L'intégrale sera alors de la forme :

$$q = e^{-at}(A \cos bt + B \sin bt)$$

$$i = -\frac{dq}{dt} = a e^{-at}(A \cos bt + B \sin bt) - e^{-at}(-bA \sin bt + bB \cos bt)$$

$$i = e^{-at}\left\{(Aa - bB) \cos bt + (bA + aB) \sin bt\right\}$$

Pour $t=o$, nous devons avoir, $q=Q$, d'où :

$$A = Q$$

Pour $t=o$, nous devons avoir :

$$i = o$$

$$A\,a - b\,B = o \qquad B = \frac{a\,Q}{b}$$

Les équations seront donc :

$$q = e^{-at}\left(Q \cos bt + \frac{a\,Q}{b} \sin bt\right)$$

$$i = e^{-at}\left(b\,Q + \frac{a^2}{b} Q\right) \sin bt$$

$$i = \frac{1}{b}(a^2 + b^2)\, Q\, e^{-at} \sin bt$$

La charge, ainsi que la différence de potentiel aux bornes $\left(\frac{q}{C}\right)$ et l'intensité du courant sont représentés par des fonctions périodiques sinusoïdales, non simples.

La durée d'une phase complète sera :

$$T = \frac{2\pi}{b} = 4\pi L \sqrt{\frac{C}{4L - Cr^2}}$$

Pour :

$$t = o \qquad t = \frac{\pi}{b} \qquad t = \frac{2\pi}{b} \qquad t = \frac{3\pi}{b} \text{ etc.....}$$

l'intensité du courant est nulle.

Pour :

$$t = \frac{\pi}{2b} \qquad t = \frac{3\pi}{2b} \qquad t = \frac{5\pi}{2b} \text{ etc.....}$$

la valeur absolue de l'intensité est un maximum, mais ces maxima vont en décroissant.

Pour :

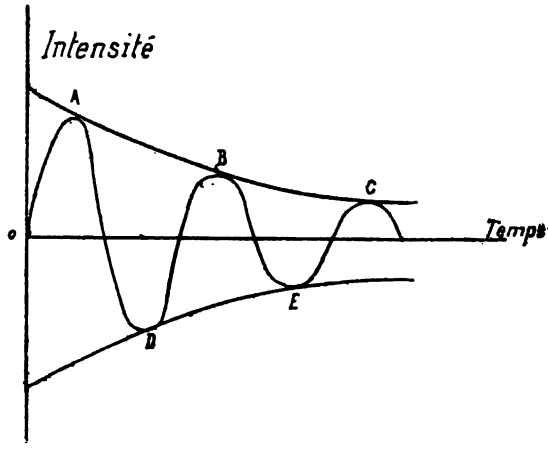


Fig. 55

$$t = \frac{\pi}{2b} \text{ on a } i_1 = \frac{1}{b}(a^2 + b^2)\,Q\,e^{-\frac{a\pi}{2b}}$$

$$t = \frac{3\pi}{2b} \text{ on a } i_2 = -\frac{1}{b}(a^2 + b^2)\,Q\,e^{-\frac{3a\pi}{2b}}$$

$$t = \frac{5\pi}{2b} \text{ on a } i_3 = \frac{1}{b}(a^2 + b^2)\,Q\,e^{-\frac{5a\pi}{2}}$$

Si on prend pour abscisses les temps et pour ordonnées les valeurs de l'intensité, on obtiendra une courbe telle que celle de la figure 55.

Il est facile de voir que les points A, B, C, dont les ordonnées sont maxima, sont situés sur une courbe dont l'équation est :

$$y = A\,e^{-at}$$

$$y = \frac{1}{b}(a^2 + b^2)\,Q\,e^{-at}$$

et que les points D, E dont les ordonnées sont minima, sont situés sur une courbe placée symétriquement par rapport à l'axe des abscisses, dont l'équation est :

$$y = -\frac{1}{b}(a^2 + b^2)\,Q\,e^{-at}$$

Ces deux courbes représentées sur la figure 55, coupent l'axe des y, en des points qui ont respectivement pour ordonnées

$$\mp \frac{1}{b}(a^2 + b^2)\,Q.$$

Nous avons vu que la durée d'une phase complète est :

$$L = 4\pi L\sqrt{\frac{C}{4L - Cr^2}}$$

Quand $4L = Cr^2$, la durée de la phase est infinie, en effet, on a une décharge continue.

L et C étant donnés, la valeur de r rendant T minimum sera $r = o$.

$$i = \frac{1}{i}(\alpha^2 - b^2)\, Q\, e^{-\alpha t} \sin bt$$

La charge, ainsi que la différence de potentiel aux bornes $\left(\frac{q}{C}\right)$ et l'intensité du courant sont représentés par des fonctions périodiques sinusoïdales, non simples.

La durée d'une phase complète sera :

$$T = \frac{2\pi}{b} = 4\pi L \sqrt{\frac{C}{4L - Cr^2}}$$

Pour :

$$t = o \qquad t = \frac{\pi}{b} \qquad t = \frac{2\pi}{b} \qquad t = \frac{3\pi}{b} \text{ etc.....}$$

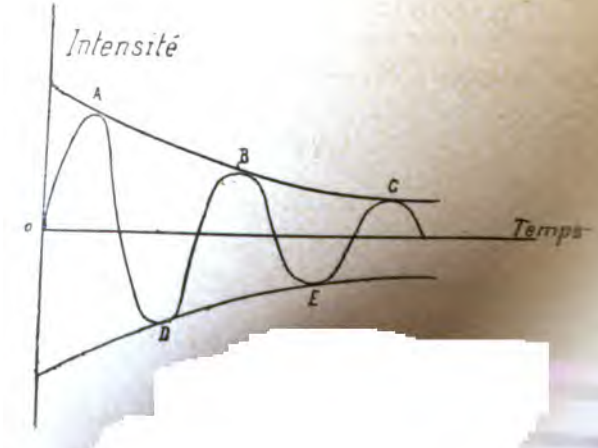
l'intensité du courant est nulle.

Pour :

$$t = \frac{\pi}{2b} \qquad t = \frac{3\pi}{2b} \qquad t = \frac{5\pi}{2b} \text{ etc.....}$$

la valeur absolue de l'intensité est un maximum, mais ces maxima vont en décroissant.

Pour :



eur, pour

nt que le
nsion que
produit la
vient à sa
parables à

une résis-
s un fluide
rique suffi-
ontinue.
masse ou de
e varie avec
du milieu qui

phase de l'os-
minue (tant que

rcalant un plus ou
nd le coefficient de
t assez grande, pour
les à l'oreille, on per-
gmenter ou diminuer la

e un cent millionième à un
rier convenablement les va-

trique, produisent dans le mi-
t lieu à des phénomènes d'inter-
réflexion, ainsi que l'ont montré les

le rôle d'un condensateur (condensa-

ectricité, tome 1er, page 249.

r et C étant donnés, la valeur de L qui rendra T minimum, pourra être trouvée de la manière suivante.

Il faut rendre :

$$\frac{L^2 C}{4L - Cr^2} \text{ minimum}$$

prenant la dérivée et l'égalant à zéro, on aura :

$$2 L C (4 L - C r^2) - 4 L^2 C = o$$

$$8 L^2 C - 4 L^2 C - 2 L C^2 r^2 = o$$

$$2 L - C r^2 = o$$

$$L = \frac{C r^2}{2}$$

Dans ce cas, la durée de la période est :

$$T = 4 \pi L \sqrt{\frac{C}{4 L - 2 L}} = 4 \pi \sqrt{\frac{CL}{2}}$$

$$T = 4 \pi \frac{C r^2}{C} \sqrt{\frac{C}{C r^2}} = 2 \pi C r$$

Comme l'a indiqué M. Fleeming on peut expliquer le phénomène de la décharge vibratoire, en se rappelant les expériences de MM. Clément et Desormes, sur l'écoulement des gaz.

Deux réservoirs, l'un plein d'air comprimé, l'autre dans lequel on a fait le vide, sont mis en communication.

1° Par un tuyau long et étroit. Dans ce cas l'air contenu dans le premier réservoir, s'échappe dans le second d'une manière continue.

2° Par un tuyau large et court. L'équilibre de pression entre les deux réservoirs ne s'établit qu'après une série d'oscillations.

On voit l'analogie complète avec un condensateur ; un tuyau long et étroit offrant à l'air une grande résistance par suite des pertes de charge. Dans le cas d'un condensateur, quand on a, $r^2 > \frac{4 L}{C}$, on a une grande résistance à la décharge.

Le tuyau large et court correspond au cas du condensateur, pour lequel on a, $r^2 < \frac{4L}{C}$

On peut aussi s'expliquer le phénomène (1) en se rappelant que le diélectrique d'un condensateur chargé, est soumis à une tension que l'on peut comparer à celle d'un ressort. Si la cause qui produit la tension vient à disparaître brusquement, le diélectrique revient à sa position initiale, après avoir effectué des oscillations comparables à celles que décrit un ressort subitement détendu.

Pour empêcher le ressort d'osciller, il faudra opposer une résistance à son mouvement, par exemple en le plongeant dans un fluide visqueux. De même, en présentant une résistance électrique suffisante à la décharge d'un condensateur, on rend celle-ci continue.

La période des oscillations d'un ressort dépend de sa masse ou de son inertie. De même la période de décharge électrique varie avec le coefficient de s. i. qui représente l'inertie magnétique du milieu qui entoure le circuit.

En augmentant le coefficient de s. i., la durée de la phase de l'oscillation augmente, c'est-à-dire que la fréquence diminue (tant que l'on n'atteint pas $L = \frac{C r^2}{4}$).

On pourra donc faire varier la fréquence, en intercalant un plus ou moins grand nombre de spires d'une bobine. Quand le coefficient de s. i. est suffisamment grand, la période devient assez grande, pour atteindre celle des vibrations de l'air perceptibles à l'oreille, on perçoit alors un son dont on peut à volonté augmenter ou diminuer la hauteur.

M. Lodge est parvenu à faire varier T de un cent millionième à un cinq centième de seconde, en faisant varier convenablement les valeurs de C, r et L.

Les oscillations de la décharge électrique, produisent dans le milieu ambiant des ondes, qui donnent lieu à des phénomènes d'interférence, de résonnance et de réflexion, ainsi que l'ont montré les belles expériences de M. Hertz.

On explique ordinairement le rôle d'un condensateur (condensa-

(1) Eric Gérard, *Leçons sur l'Électricité*, tome 1er, page 249.

teur de Fizeau), placé en dérivation dans le circuit primaire d'une bobine d'induction, près de l'interrupteur, de la manière suivante :

Ce condensateur, au moment de la rupture, absorbe l'extra-courant, de sorte qu'il empêche la formation d'une étincelle de rupture, qui prolongerait la durée du courant, il diminue donc le temps de la variation, et par conséquent, augmente la valeur de la f. e. m. induite.

Lord Rayleigh (1) a analysé le phénomène plus complètement, et a pu attribuer principalement l'élévation du potentiel du secondaire, lors de l'introduction du condensateur, à une décharge oscillante de ce dernier.

En effet, il établit qu'au moment de la rupture, on a quand le condensateur est placé, $i_2 = 2\frac{M}{L_2} i_1$, M étant le coefficient d'induction mutuelle, L_2, le coefficient de s. i. du circuit secondaire, i_1 l'intensité du courant secondaire, i_2 celle du courant primaire, tandis que quand il n'y a pas de condensateur, et que la rupture est instantanée, on a seulement :

$$i_2 = \frac{M}{L_2} i_1$$

Expériences de M. Tesla (2).— Les très hautes fréquences sont d'après M. Tesla, nécessaires à l'obtention de très hautes tensions, tout au moins c'est le moyen le plus simple et le plus commode de les obtenir au moyen de bobines d'induction de dimensions relativement petites.

En effet, nous avons vu que la f. e.m. extérieure appliquée au circuit secondaire d'un transformateur, est exprimée par $-M\frac{di_1}{dt} = -kMI_1\cos kt$, si $i_1 = I_1 \sin kt$ est la valeur instantanée de l'intensité du courant dans le primaire, or, k est proportionnel à la fréquence par seconde (on a $k = 2\pi F$).

Pour obtenir les grandes fréquences, M. Tesla emploie deux moyens principaux.

1° A l'aide d'un alternateur constitué par un disque de fer, com-

(1) *Philosophical magazine*, vol. 39. — *Fleming, the alternate current transformer*, vol. 1, pages 383 et suivantes.

(2) Voir les bulletins de la Société internationale des Électriciens, nos 85, 87, 88 et 89.

portant 384 pôles et pouvant faire plusieurs milliers de tours à la minute, il obtient ainsi des fréquences de 10.000 périodes à la seconde.

2° Au moyen de la décharge oscillante des condensateurs.

Voici un des dispositifs qu'il emploie dans ce dernier cas :

Un alternateur A (fig. 56), envoie son courant dans le secondaire d'une bobine d'induction B_1. Le primaire de cette bobine est intercalé dans un circuit, sur lequel est placé en dérivation un condensateur C. Les extrémités de ce circuit, dans lequel est intercalé le primaire d'une seconde bobine d'induction B_2, sont terminées par des boules de laiton K_1, K. Entre K et K_1, il se forme une étincelle claquante, le condensateur en dérivation se charge quand l'étincelle cesse, il se décharge en suite lors de son établissement. La distance entre K et K_1, ainsi que la capacité du condensateur, sont modifiables à volonté, de sorte que l'on peut régler la décharge oscillante.

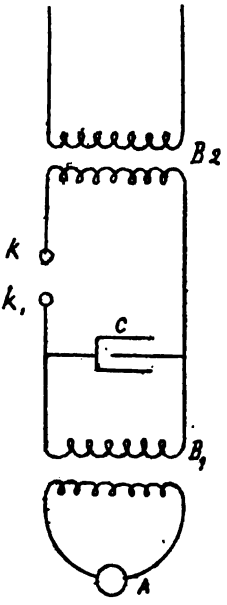


Fig. 56.

Le secondaire de la bobine B_2 est parcouru par des courants de grande fréquence et de haute tension.

L'arc qui se forme entre les boutons K et K_1, est soufflé soit par un courant d'air, soit plutôt, en plaçant entre les sphères et les pièces polaires un puissant électro, (ces pièces étant protégées par des feuilles de mica). L'emploi d'un champ magnétique de grande puissance est particulièrement utile lorsque la source est à basse fréquence. Le champ magnétique agissant à angle droit a tendance à repousser l'étincelle, à la souffler, de sorte que la décharge fondamentale se reproduit plus fréquemment.

La bobine B_2, est complètement immergée dans l'huile et est contenue dans une caisse de $0^m,50$ de côté, elle donne d'après M. Tesla des effets au moins égaux à celles des plus fortes bobines d'induction qui aient été construites.

Le noyau de cette bobine est en ébonite. En effet, il ne servirait à rien de la munir d'un noyau en fer, les courants induits ou courants de Foucault se concentreraient à la périphérie du noyau et tendraient

à produire une aimantation de sens contraire à celle produite par le courant circulant dans le primaire, l'action du fer serait nulle au point de vue magnétique, par contre, la production des courants de Foucault amènerait une perte d'énergie.

M. Tesla, au moyen du dispositif décrit ci-dessus, peut reproduire dans l'air des phénomènes analogues à ceux produits dans le vide relatif des tubes de Gessler.

Le phénomène le plus important est le transport d'énergie par un seul fil, l'autre extrémité du fil de la bobine d'induction (B_s) étant laissée libre dans l'air ou mieux reliée à une plaque métallique.

On peut ainsi produire la rotation d'un moteur, ou produire de la lumière par suite du bombardement moléculaire dans une ampoule, contenant en son centre une petite sphère de charbon, ou de toute autre matière reliée à une des extrémités du fil.

L'effet lumineux est de beaucoup augmenté en munissant la lampe d'un abat-jour métallique, ce qui revient à rapprocher les armatures d'un condensateur constitué d'une part, par la sphère de charbon, d'autre part, par les corps environnants, armatures entre lesquelles se fait, par bombardement moléculaire, l'échange d'énergie.

La grande difficulté est d'obtenir pour former la petite sphère placée au centre de l'ampoule, un corps qui ne se détériore pas rapidement.

M. Nikola Tesla s'exprime ainsi (1) :

« La production d'une petite électrode, capable de supporter des températures très élevées, est de la plus grande importance pour la production de la lumière. Elle nous permettrait d'obtenir par le moyen des courants de très grande fréquence, certainement vingt fois plus de lumière que nous n'en obtenons, maintenant d'une quantité déterminée d'énergie, à l'aide des lampes incandescentes.

« Cette estimation peut paraître exagérée, mais je crois qu'il est loin d'en être ainsi. Comme cette affirmation peut être mal comprise, je crois nécessaire d'exposer clairement le problème, tel qu'il se présente et d'indiquer la voie dans laquelle, je crois qu'une solution est possible.

(1) *Bulletin de la Société internationale des Electriciens*, Juin 1892, n° 89

« En commençant cette étude, on pourrait croire que ce qu'il faut obtenir, c'est une haute température de l'électrode.

« C'est une erreur. La vive incandescence du bouton est un mal nécessaire, mais ce qu'il faut réellement obtenir, c'est la vive incandescence du gaz qui entoure ce bouton. En d'autres termes, le problème est de porter à la plus haute incandescence possible, une masse de gaz ».

« Plus grande sera la fréquence, plus vive la vibration moyenne, et plus économique sera la production de lumière. Mais pour maintenir une masse de gaz à l'état incandescent, dans un vase de verre, il faut la tenir loin du verre, c'est-à-dire pratiquement, la confiner au centre du globe ».

« ..... Les facteurs pour obtenir une forte lumière sont surtout le potentiel, la fréquence et la densité à la surface de l'électrode. Aussi faut-il employer un bouton aussi petit que possible, pour accroître la densité. Sous le choc violent des molécules du gaz qui l'environnent, le bouton est sans doute porté à une vive incandescence, mais le gaz qui l'environne forme une flamme ou photosphère dont le volume atteint plusieurs centaines de fois celui du bouton. On pourrait penser que, en poussant aussi loin que possible l'incandescence de l'électrode, elle serait instantanément volatilisée, mais la réflexion montre que cela ne doit pas être et l'expérience le confirme, et c'est dans ce fait que git principalement la valeur de ce genre de lampes.

« Au commencement du bombardement, l'électrode devient très chaude, mais à mesure que le gaz s'échauffe et devient plus conducteur, il absorbe une plus grande part de l'énergie. L'électrode se trouve donc moins frappée et plus le gaz absorbe d'énergie plus le bouton est protégé. C'est donc la production d'une puissante photosphère qui est le vrai moyen de protection de l'électrode. Ce moyen est tout relatif, bien entendu et il ne faudrait pas en conclure que si l'on atteint un degré d'incandescence encore plus élevé, l'électrode ne serait pas détériorée. Ces conditions diffèrent infiniment de celles qui concernent les lampes à incandescence ordinaires, dans lesquelles tout le travail est accompli dans le filament sans que le gaz y prenne aucune part. »

M. d'Arsonval a reproduit toutes les expériences de M. Tesla, et a notamment démontré l'inocuité des courants à grande fréquence. Il

a, par exemple, pu allumer en faisant passer le courant à travers son corps, jusqu'à 7 lampes de 125 volts et un demi-ampère. La fréquence était de 6 à 700.000 alternances à la seconde. A basse fréquence un tel courant aurait certainement entrainé la mort à bref délai.

CHAPITRE VII

Influence du fer.

§ 1. — Hystérésis

La réalisation pratique de tout appareil électrique nécessite le plus souvent l'emploi de fils conducteurs isolés et de masses de fer ou de fonte, plus ou moins pures.

Avec l'emploi de courants continus on n'éprouve aucun désagrément, par suite de la présence du fer ; tout au plus a-t-on à redouter les courants produits par la f. e. m. de self-induction au moment de la rupture d'un circuit. Par exemple, dans le cas du fonctionnement d'une dynamo à courant continu, on doit redouter et éviter toute rupture de circuit général, principalement quand l'on a affaire à une dynamo en série.

Dans ces dernières années, M. Ewing a découvert un phénomène insoupçonné jusqu'alors qui a une influence considérable sur le fonctionnement des appareils à courants alternatifs et en particulier sur celui des transformateurs. Pour bien faire comprendre la nature de ce phénomène, auquel Ewing a donné le nom d'*hystérésis*, prenons les choses à leur origine et considérons un échantillon de fer, vierge de toute action magnétique.

Si nous le soumettons à des champs croissants d'une façon continue depuis zéro, nous obtenons, pour l'induction magnétique spécifique B des valeurs dont l'accroissement progressif peut être représenté par une courbe telle que OB (fig. 57) qui a reçu le nom de *courbe du magnétisme*. La forme de cette courbe varie avec la nature de l'échantillon ; avec celui que nous avons pris pour exemple, l'induction varie à peu près proportionnellement au champ de L jusqu'en M, l'accroissement devient ensuite de M en B, moins rapide et ensuite, le long de BN, il diminue de plus en plus pour devenir pratiquement nul. A partir de B on dit que le métal commence à se *saturer*.

L'*hystérésis* est le phénomène par lequel la valeur de l'induction B

dans le fer n'est pas absolument constante pour une même intensité de champ H, mais dépend, au contraire, des états magnétiques antérieurs, par lesquels a passé le métal. Dans ces conditions, si nous soumettons un échantillon de fer, ayant déjà subi une aimantation,

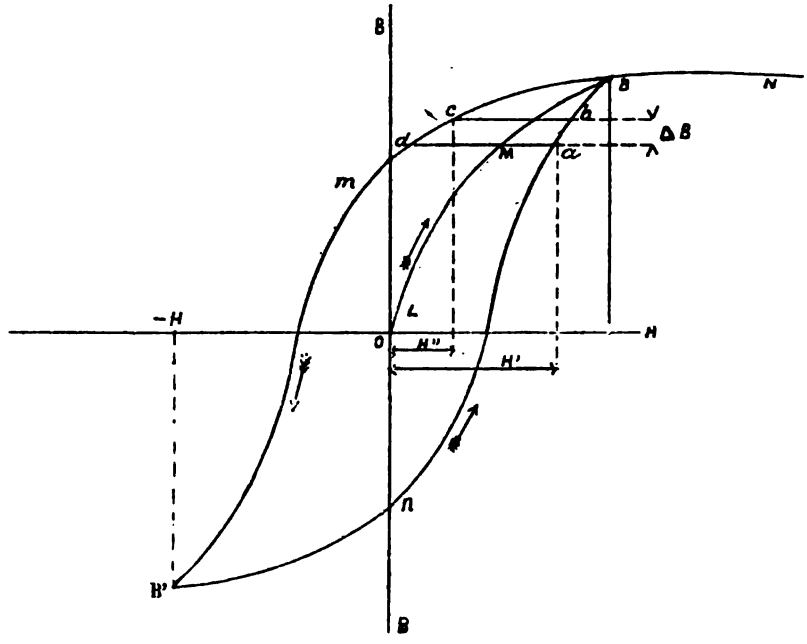


Fig. 57

à des champs variant en intensité, successivement de 0 à + H de + H à zéro, de zéro à — H, et enfin de — H à zéro, nous obtenons pour représenter l'induction spécifique B, les portions de courbes correspondantes, *n*B, B*m*, *m*B' et B'*n*. Si le magnétisme rémanent était nul, la courbe partirait de O au lieu de partir de *n*.

La perte d'énergie occasionnée par le phénomène d'hystérésis est facile à calculer. Considérons la courbe d'hystérésis de la figure 57, que nous supposerons avoir été obtenue avec un anneau de fer, ayant 1 cm² de section et *l* cm. de longueur. Si la bobine magnétisante enroulée sur ce noyau a *n* spires et est traversée par un courant de I ampères, l'intensité du champ créé lorsqu'il n'y a pas de noyau de fer est :

$$H = \frac{4 \pi n I 10^{-1}}{l}$$

Choisissons sur la courbe un point a quelconque et supposons que B s'accroisse d'une petite quantité ΔB pendant le temps Δt.

La force contre électromotrice de self-induction aura comme valeur absolue :

$$e_s = n \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

H atteint la valeur H' correspondant à un courant d'intensité I' et l'on a :

$$I' 10^{-1} = \frac{H' l}{4 \pi n}$$

L'énergie dépensée pendant le temps Δt pour passer de H à H' est donc :

$$\Delta t \times e_s \times I' 10^{-1} = \Delta t \frac{n \Delta B}{\Delta t} \times \frac{H' l}{4 \pi n} = \frac{H' l}{4 \pi} \Delta B$$

Sur la courbe de descente, pour la même valeur de B, H n'est plus égal qu'à H" de sorte qu'à ce moment pour une diminution ΔB de l'induction spécifique, le fer ne restitue au circuit électrique qu'une quantité d'énergie égale à :

$$\frac{H'' l}{4 \pi} \Delta B$$

Il s'en suit qu'il disparaît une certaine quantité d'énergie dans le fer, dont l'expression est :

$$(H' - H'') \frac{\Delta B \, l}{4 \pi}$$

Quand ΔB est très petit $(H' - H'') \Delta B$ représente la surface d'un petit quadrilatère $a\,b\,c\,d$, peu différent d'un parallélogramme.

En subdivisant la surface curviligne entière en un nombre suffisamment grand de parallélogrammes de ce genre, on obtient comme expression de la perte d'énergie, pour un cycle complet, parcouru par le magnétisme dans l'échantillon de fer.

$$\frac{l \times \text{surface curviligne}}{4 \pi}$$

Mais comme le fer a un volume de $l \times 1$ cm $= l$ cm³, il en résulte que la perte par cm³ sera ;

$$\frac{\text{surface curviligne}}{4\pi} \text{ ergs}$$

Si, comme cela arrive souvent, nous voulons exprimer cette perte en watts, nous devrons diviser le résultat précédent par 10^7, car un watt vaut 10^7 unités C. G. S.

M. Ch. Steinmetz a découvert à la suite de nombreuses expériences que la perte d'énergie par hystérésis, dans le fer par cycle complet, pouvait s'exprimer par une formule empirique très simple :

$$h = \eta \, B^{1,6}$$

dans laquelle h est la perte d'énergie exprimée en ergs et B l'induction spécifique maximum à laquelle le fer est soumis, exprimée en unités C. G. S. par cm². Cette formule a été vérifiée par un grand nombre d'expériences et semble absolument acceptable.

La perte d'énergie par seconde est donc, si F est la fréquence :

$$h' = \eta F B^{1,6} \text{ ergs} = \eta F B^{1,6} \, 10^{-7}$$

M. Steinmetz a appliqué sa loi à un très grand nombre d'échantillons. Parmi les nombreuses valeurs qu'il a obtenues pour η, voici les plus importantes :

Fil de fer très doux	$\eta = 0{,}002$
Tôle de fer doux très mince	0,0024
Bonne tôle mince	0,003
Tôle épaisse	0,0033
Tôle très ordinaire pour noyaux de transformateurs	0,004 à 0,0045
Acier fondu doux, recuit	0,008
Acier doux pour machines	0,0094
Acier fondu ordinaire	0,012
Fonte	0,0162
Acier fondu trempé	0,025

On peut se rendre sommairement compte de la manière suivante, que la non proportionnalité du flux magnétique à l'intensité du champ et l'hystérésis, modifient profondément la forme sinusoïdale d'un courant.

Supposons que le primaire d'une bobine soit parcouru par un cou-

rant périodique simple, dont l'intensité pourra être représentée en fonction du temps par la sinusoïde OABCDE (fig. 58).

Les abscisses de la courbe du magnétisme sont proportionnelles à l'intensité du champ, c'est-à-dire à l'intensité du courant du primaire et les ordonnées représentent la valeur du flux magnétique. Prenons,

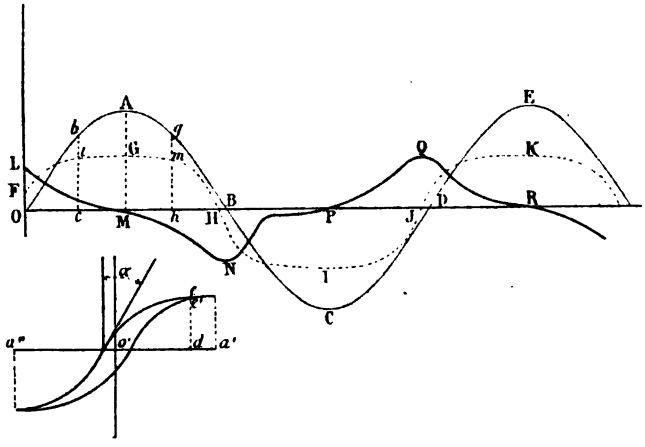


Fig. 58

afin de simplifier la construction, pour cette courbe, une échelle telle qu'en choisissant l'abscisse égale à l'ordonnée de la courbe représentant l'intensité dans le primaire, on obtienne une ordonnée proportionnelle au flux magnétique,

On aura donc :

$$o'a' = MA.$$

La courbe du flux magnétique pourra être tracée de la manière suivante, par exemple, au moment où l'intensité du courant aura la valeur bc, nous prendrons $o'd = bc$, l'ordonnée de la courbe du flux sera de (car l'intensité va en croissant), nous prendrons donc $ci = de$. Quand l'intensité du courant sera $hg = bc$, nous prendrons $hm = de'$ (car alors l'intensité va en diminuant). Nous pourrons donc ainsi construire par points la courbe FGHIJK, représentant le flux par rapport au temps.

La f. e. m. dans le circuit secondaire sera à chaque instant proportionnelle à la dérivée du flux par rapport au temps, c'est-à-dire au

coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative du flux.

Il sera donc facile de représenter la valeur de cette f. e. m. par rapport au temps, au moyen de la courbe LMNOPQR et l'on voit qu'elle diffère notablement d'une sinusoïde.

Si l'on admet que le flux magnétique est proportionnel à l'intensité

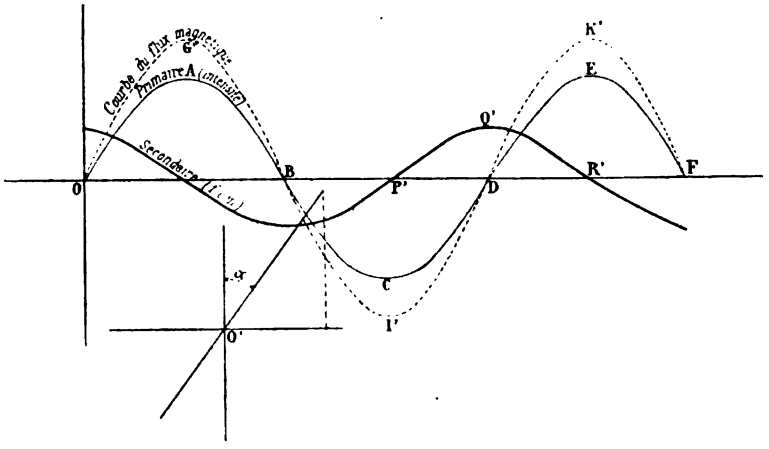


Fig 59

du champ, la courbe du magnétisme devient une ligne droite faisant avec l'axe des y, l'angle α (fig. 59).

La courbe du flux est alors une sinusoïdale, ainsi que celle de la f. e. m. dans le secondaire, comme qu'il est indiqué sur la figure 59, dans laquelle les courbes sont tracées par le procédé indiqué ci-dessus et aux mêmes échelles que dans le cas précédent.

Il est bien évident que le courant qui circule dans le secondaire, réagit sur le primaire et que dans le premier cas, si la f. e. m. appliquée au primaire est une f. e. m. périodique simple, la courbe représentant l'intensité dans ce circuit, ne sera pas une sinusoïde.

La courbe représentative de l'intensité du courant ou de la f. e. m. dès qu'il y a du fer dans les appareils, n'est donc pas exactement une sinusoïde, ainsi que nous l'avons admis jusqu'ici.

On mesure, au moyen des appareils, la valeur efficace, c'est-à-dire la racine carrée du carré moyen de l'ordonnée de la courbe (page 25) et on en déduit sa valeur moyenne et sa valeur maximum.

Dans le cas où la courbe est une sinusoïde on a :

Valeur moyenne = 0,9 valeur efficace
Valeur maximum = 1,57 valeur efficace

Dans tous les cas, ainsi que l'explique M. Evershed, dans une étude sur le rendement des alternateurs, la courbe est comprise entre une succession de triangles isocèles, égaux, placés alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des x et une succession de rectangles, égaux, placés dans les mêmes conditions.

Dans le cas des triangles, la valeur maximum est double de la valeur moyenne et il est facile de démontrer que la valeur efficace est égale $\frac{1}{\sqrt{3}}$ fois la valeur maximum, on a donc :

Valeur moyenne = 0,86 valeur efficace
Valeur maximum = 1,73 valeur efficace

Dans le cas des rectangles, la valeur maximum, la valeur moyenne et la valeur efficace sont égales.

En admettant, comme on le fait généralement, que la valeur moyenne est égale à 0,9 fois la valeur efficace, et que la valeur maximum est égale à 1,57 fois la valeur efficace, on commet donc des erreurs en moins, qui atteignent au maximum 10 %.

§ 2. — COURANTS DE FOUCAULT ET LEUR CALCUL

Toutes les fois qu'une masse métallique est traversée par un flux variable, des courants induits prennent naissance à l'intérieur du métal et tendent à se fermer suivant des circuits de résistance minimum. Ces courants ont reçu le nom de *courants de Foucault* ou de *courants parasites*; la résistance opposée à leur circulation est généralement très faible; quand le métal ne présente pas de solution de continuité, il en résulte que ce dernier s'échauffe et peut atteindre une température dangereuse pour l'appareil dont il fait partie. C'est pourquoi l'on est obligé dans la plupart des appareils industriels, tels que dynamos et transformateurs, de sectionner le fer perpendiculairement au sens de la f. e. m. induite. On est ainsi amené à employer de la tôle de fer très mince ayant des épaisseurs comprises

entre 0,2 et 0,5 millimètre, dont en isole électriquement les diverses feuilles les unes des autres.

Au début, l'on employait très souvent et encore actuellement, on emploie parfois, pour le noyau de fer des induits de dynamos, du fil de fer doux verni enroulé sur un support en métal non magnétique, de masse peu importante et situé autant que possible hors du champ magnétique.

Pour tenir compte des courants de Foucault par le calcul, on pourra procéder comme nous l'indiquons dans ce qui suit pour les deux cas les plus fréquents, c'est-à-dire pour des masses de sections respectivement circulaires et rectangulaires.

a. — *Courants de Foucault dans une masse de fer de section circulaire.*

Soit ABCD la section de la masse dans laquelle on veut calculer la perte par courants de Foucault, section produite par un plan perpendiculaire à la direction du champ magnétique (Fig. 60).

Considérons un circuit élémentaire quelconque de rayon r, se propageant dans un centimètre de longueur de fil dans le sens des lignes de force, suivant un anneau de largeur radiale dr. Si nous appelons $\mathbf{b} = \mathbf{B} \sin kt$, la valeur instantanée de l'induction spécifique, l'induction totale à l'intérieur du circuit élémentaire considéré est :

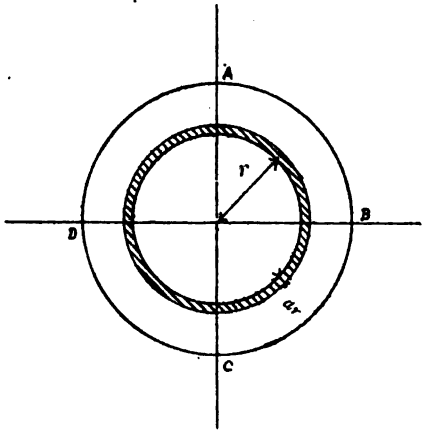


Fig. 60

$$\pi r^2 \mathbf{b} = \pi r^2 \mathbf{B} \sin kt$$

Par suite, la f. e. m. instantanée, qui produit la circulation du courant élémentaire, est, en valeur absolue :

$$e' = \pi r^2 \frac{d\mathfrak{b}}{dt} = \pi r^2 \frac{d\,(\mathfrak{B} \sin kt)}{dt} = \pi r^2\, \mathfrak{B}\, k \cos kt$$

La f. e. m. en volts sera :

$$e = \pi r^2\, \mathfrak{B}\, k \cos kt \times 10^{-8}$$

$\mathfrak{B}$ étant exprimé en unités C. G. S.

La résistance du circuit dans lequel circule le courant est :

$$R = \alpha \frac{2\pi r}{dr \times 1^{cm}}$$

α étant la résistance électrique spécifique du fer donnant le résultat de la formule précédente exprimé en ohms. Si α' est la résistance spécifique en unités C. G. S, on aura :

$$\alpha = \alpha' \times 10^{-9}$$

Si α'' est la résistance spécifique en microhms $\frac{cm}{cm^2}$ on a :

$$\alpha = \alpha'' \times 10^{-6}$$

La perte de travail due à la résistance du circuit considéré sera :

$$dw = \frac{e^2}{R} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\alpha} r^3\, dr\, \mathfrak{B}^2 k^2 \cos^2 kt\, 10^{-16}$$

exprimée en watts.

Si nous appelons F la fréquence, nous avons :

$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi F = k$$

La formule devient, par suite, en appliquant cette relation :

$$dw = 2\pi^3 \frac{1}{\alpha} r^3\, dr\, F^2\, \mathfrak{B}^2 \cos^2 kt\, 10^{-16}$$

La valeur moyenne de $\cos^2 kt$, est $\frac{1}{2}$, de sorte que la perte d'énergie pour une période ou un cycle complet, sera :

$$w = 2\pi^3 \frac{1}{\alpha} r^3 dr \, F^2 B^2 \frac{T}{2} 10^{-16}$$

$$= \pi^3 \frac{1}{\alpha} r^3 dr \, FB^2 10^{-16}$$

En intégrant de $r = o$ à $r = r_1$, nous obtenons pour la perte d'énergie dans la masse par période :

$$W = \frac{\pi^3 F B^2 r_1^4}{4\alpha} \times 10^{-16}$$

La perte d'énergie par seconde sera :

$$W' = \frac{\pi^3 r_1^4 F^2 B^2}{4\alpha} \times 10^{-16}$$

Pour avoir la perte par cm³, nous diviserons, ces résultats par le volume considéré, c'est-à-dire ($\pi r_1^2 \times 1$ cm.) :

Nous aurons donc :

Pour la perte en watts, par centimètre cube et par cycle :

$$W_{cm^3} = \frac{\pi^2}{4\alpha} r_1^2 FB^2 \times 10^{-16}$$

Pour la perte en watts, par centimètre cube et par seconde :

$$W_{cm^3} = \frac{\pi^2}{4\alpha} r_1^2 F^2 B^2 \times 10^{-16}$$

Pour le fer recuit, ordinairement employé dans les appareils, la résistance spécifique en microhm $\frac{cm}{c\,m^2}$ est 9,636 ; nous aurons donc :

$$\alpha = 9{,}636 \; 10^{-6}$$

$$W_{cm^3} = 0{,}25 \, r_1^2 FB^2 \times 10^{-10}$$

$$W'_{cm^3} = 0{,}25 \, r_1^2 F^2 B^2 \times 10^{-10}$$

b. — *Courants de Foucault dans une masse de fer de section rectangulaire.*

Soit ABCD la section de la masse dans laquelle on veut calculer les courants de Foucault, par un plan perpendiculaire a la direction du champ (fig. 61) ; soient X et mX les longueurs des côtés. Considérons le courant élémentaire se propageant suivant un chemin rectangulaire *ab cd* ayant, suivant *ad* et *bc*, la largeur *dx* et suivant *ab* et *dc*, la largeur *mdx*.

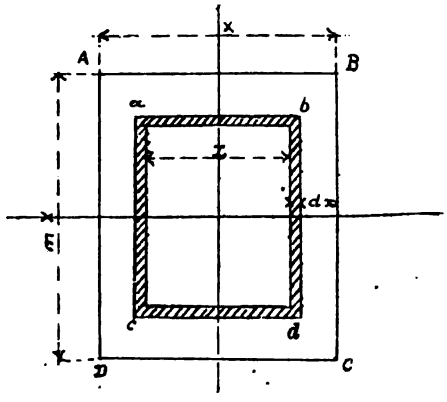


Fig. 61

L'induction totale à l'intérieur de ce circuit élémentaire est, en conservant pour **b** la même signification que dans le cas précédent :

$$x\,m\;x\mathbf{b} = mx^2\,\mathbf{B}\sin kt$$

Par suite, la f. e. m. instantanée, qui produit la circulation dn courant élémentaire est :

$$e' = m\,x^2\,\frac{d\mathbf{b}}{dt} = m\,x^2\,\frac{d\,(\mathbf{B}\sin kt)}{dt} = m\,x^2\;\mathbf{B}k\cos kt$$

ou encore en volts :

$$e = m\,x^2\;\mathbf{B}\,k\cos kt \times 10^8$$

La résistance du circuit dans lequel circule le courant élémentaire est :

La valeur moyenne de $\cos^2 kt$, est $\frac{1}{2}$, de sorte que la perte d'énergie pour une période ou un cycle complet, sera :

$$w = 2\pi^2 \frac{1}{\alpha} r^3 dr \, F^2 B^2 \frac{T}{2} 10^{-16}$$

$$= \pi^3 \frac{1}{\alpha} r^3 dr \, F B^2 10^{-16}$$

En intégrant de $r = o$ à $r = r_1$, nous obtenons pour la perte d'énergie dans la masse par période :

$$W = \frac{\pi^3 F B^2 r_1^4}{4\alpha} \times 10^{-16}$$

La perte d'énergie par seconde sera :

$$W' = \frac{\pi^3 r_1^4 F^2 B^2}{4\alpha} \times 10^{-16}$$

Pour avoir la perte par cm³, nous diviserons, ces résultats par le volume considéré, c'est-à-dire ($\pi r_1^2 \times 1$ cm.) :

Nous aurons donc :

Pour la perte en watts, par centimètre cube et par cycle :

$$W_{cm^3} = \frac{\pi^2}{4\alpha} r_1^2 F B^2 \times 10^{-16}$$

Pour la perte en watts, par centimètre cube et par seconde :

$$W_{cm^3} = \frac{\pi^2}{4\alpha} r_1^2 F^2 B^2 \times 10^{-16}$$

Pour le fer recuit, ordinairement employé dans les appareils, la résistance spécifique en microhm $\frac{cm}{cm^2}$ est 9,636 ; nous aurons donc :

$$\alpha = 9{,}636 \; 10^{-6}$$

$$W_{cm^3} = 0{,}25 \, r_1^2 F B^2 \times 10^{-10}$$

$$W'_{cm^3} = 0{,}25 \, r_1^2 F^2 B^2 \times 10^{-10}$$

b. — *Courants de Foucault dans une masse de fer de section rectangulaire.*

Soit ABCD la section de la masse dans laquelle on veut calculer les courants de Foucault, par un plan perpendiculaire a la direction du champ (fig. 61) ; soient X et mX les longueurs des côtés. Considérons le courant élémentaire se propageant suivant un chemin rectangulaire *ab cd* ayant, suivant *ad* et *bc*, la largeur dx et suivant *ab* et *dc*, la largeur mdx.

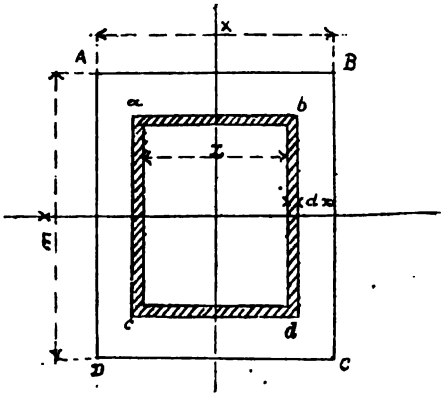


Fig. 61

L'induction totale à l'intérieur de ce circuit élémentaire est, en conservant pour **b** la même signification que dans le cas précédent :

$$x\,m\;x\mathbf{b} = mx^2\,\mathbf{B}\sin kt$$

Par suite, la f. e. m. instantanée, qui produit la circulation dn courant élémentaire est :

$$e' = m\,x^2\,\frac{d\mathbf{b}}{dt} = m\,x^2\,\frac{d\,(\mathbf{B}\sin kt)}{dt} = m\,x^2\;\mathbf{B}k\cos kt$$

ou encore en volts :

$$e = m\,x^2\;\mathbf{B}\,k\cos kt \times 10^8$$

La résistance du circuit dans lequel circule le courant élémentaire est :

$$R = \alpha \left\{ \frac{2\,x}{m\,d\,x \times 1^{cm}} + \frac{2\,m\,x}{dx \times 1^{cm}} \right|$$

c'est-à-dire :

$$R = \alpha \frac{2\,x + 2\,m^2\,x}{m\,d\,x} = 2\,\alpha\,x \frac{1 + m^2}{m\,dx}$$

α ayant la même signification que dans le cas précédent.

Le travail élémentaire dû à la résistance du circuit considéré sera :

$$dw = \frac{e^2}{R} = \frac{m^2\,x^1\,B^2\,k^2\cos^2 kt}{2\,\alpha\,x\,\frac{1+m^2}{m\,d\,x}} \times 10^{-16}$$

$$dw = \frac{m^3\,x^3\,dx\,B^2\,k^2\cos^2 kt}{2\,\alpha\,(1+m^2)} \times 10^{-16}$$

La valeur moyenne de $\cos^2 kt$ est $\frac{1}{2}$; la somme des valeurs de $\cos^2 kt$, pour un cycle complet, ou une période, sera $\frac{T}{2}$; on aura donc :

$$w = \frac{m^3 x^3 dx\,B^2 k^2}{2\,\alpha\,(1+m^2)} \cdot \frac{T}{2} \times 10^{-16}$$

et comme :

$$\frac{k^2 T}{2} = \frac{2\pi^2}{T} = 2\pi^2 F$$

F étant la fréquence par seconde, on aura :

$$w = \frac{m^3\pi^2}{\alpha(1+m^2)}\,x^3 dx\,F B^2 \times 10^{-16}$$

En intégrant de $x = o$ à $x = X$, nous obtenons la perte d'énergie par période pour la masse totale, qui est :

$$W = \frac{m^3\pi^2}{4\,\alpha\,(1+m^2)}\,X^4 F B^2 \times 10^{-16}$$

Le volume du métal, étant $m\,X^2 \times 1$ cm., la perte d'énergie par période et par cm.^{3} de fer sera :

$$W_{cm^3} = \frac{m^2\pi^2}{4\,\alpha\,(1+m^2)} X^2\,FB^2 \times 10^{-16}$$

La perte d'énergie, par cm³ et par seconde, sera :

$$W'_{cm^3} = \frac{m^2\pi^2}{4\,\alpha\,(1+m^2)} X^2F^2B^2 \times 10^{-16}$$

Si la section était un carré, on aurait $m = 1$, et :

$$W_{cm^3} = \frac{\pi^2}{8\alpha} X^2FB^2 \times 10^{-16}$$

Si la section était le cercle inscrit dans ce carré, on aurait $r_1 = \frac{X}{2}$, et la perte par cycle et cm.³ serait (page 276) :

$$W_{cm^3} = \frac{\pi^2}{4\alpha} \cdot \frac{X^2}{4} FB^2 \times 10^{-16}$$

c'est-à-dire moitié moindre.

Cette différence, évidemment exagérée, provient de ce que nous avons supposé que les courants se propageaient suivant des circuits rectangulaires, tandis qu'ils ont évidemment tendance à se propager suivant des cercles.

Comme la formule trouvée donne des résultats trop forts, on peut l'affecter du coefficient 0,65, et on aura finalement :

Pour la perte par cm.³, et par période ou cycle :

$$W_{cm^3} = \frac{0{,}65\,\pi^2}{4\,\alpha} \cdot \frac{m^2}{1+m^2} X^2FB^2 \times 10^{-16}$$

Pour la perte par cm.³ par seconde :

$$W'_{cm^3} = \frac{0{,}65\,\pi^2}{4\,\alpha} \cdot \frac{m^2}{1+m^2} X^2F^2B^2 \times 10^{-16}$$

Pour le fer recuit :

$$\alpha = 9{,}636 \times 10^{-16}$$

Nous aurons donc :

$$W_{cm^3} = 0{,}16 \frac{m^2}{1+m^2} X^2 F B^2 \times 10^{-10}$$

$$W'_{cm^3} = 0{,}16 \frac{m^2}{1+m^2} X^2 F^2 B^2 \times 10^{-10}$$

Dans le cas où l'on emploie des tôles très minces, si X représente l'épaisseur (en cm.), m sera très grand, et on pourra admettre que $\frac{m^2}{1+m^2}$ est égal à l'unité.

Paris. — Imp. E. BERNARD et Cie, 23, rue des Grands-Augustins.

89089713333

B89089713333A

89089713333

b89089713333a